manual de fórmulas técnicas

Kurt Gieck / Reiner Gieck

- **Manual electrónico con fórmulas prediseñadas**
- **Potente editor de fórmulas**
- **Función de graficado**



I/APLICACIONES BASICAS

II/APLICACIONES AVANZADAS

Traducción:

Dr. Víctor Gerez Greiser
Universidad Nacional Autónoma de México
University of California (Berkeley)

Ing. José de la Cera Alonso
Universidad Autónoma Metropolitana
Technische Hochschule München

Con la colaboración de:

Ing. Quím. Virgilio González Pozo

Revisión, adaptación y complemento:

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica:

Francisco Javier Rodríguez Cruz
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Versión en español de la edición electrónica en alemán de la obra titulada:
Technische Formelsammlung, por Kurt Gieck y Reiner Gieck

ISBN 3 920379 21 7
75a. edición conjunta

Pitágoras 1139, Col. Del Valle 03100, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

ISBN 970-15-0840-8, Alfaomega
ISBN 84-267-1330-0, Marcombo

IMPRESO EN ESPAÑA – PRINTED IN SPAIN

PREFACIO

Miles de estudiantes de diversas áreas, técnicos e ingenieros han encontrado por muchos años en esta bien conocida obra: **Manual de fórmulas técnicas**, de **Gieck**, una útil herramienta para consultar las fórmulas técnico-científicas más usuales en sus campos de acción, de manera clara, concisa y ordenada. Por las completas explicaciones que se proporcionan y mediante la aclaración de los conceptos implicados, es posible entender bien las fórmulas, aun sin ser especialista en el tema.

Esta nueva edición revisada, corregida y aumentada, basada en la 30ª edición del clásico texto de bolsillo -además de conservar todas las cualidades de contenido y forma que lo han mantenido como el *best-seller* de los manuales técnicos y de ingeniería- incluye también un editor de fórmulas que le permitirá diseñar sus propias ecuaciones y graficarlas en un plano cartesiano, mediante la apertura de hasta 20 ventanas de cálculo, que pueden ser de parámetros variables o de resultados.

Se conservan, entre otras cosas, la impresión de texto en una sola cara del papel de la mayoría de las páginas, para que el usuario pueda efectuar anotaciones complementarias y observaciones en la otra; la clasificación e identificación de los temas con una letra mayúscula de gran tamaño en la esquina superior derecha, y la sección de tablas, ya que no siempre se puede llevar consigo una computadora.

En la parte de **Aplicaciones avanzadas** se han incluido los siguientes temas:

Teoría de ecuaciones
Elementos de máquinas
Ingeniería de control

En la **Teoría de ecuaciones** se exponen los conceptos fundamentales del álgebra superior, con lo que se da por completado el tema de álgebra. En la sección **Elementos de máquinas** se incluye lo relacionado con el diseño de engranes, y la sección **Ingeniería de control** proporciona de manera cabal los elementos conceptuales y algorítmicos necesarios para el análisis de un sistema.

Damos las gracias a los profesores M. Otto y H. W. Zimmer, quienes colaboraron en la ampliación y reelaboración de los temas.

Kurt Gieck
Reiner Gieck

Colaboraron en esta obra:

Al cuidado de la edición
Gonzalo Ferreyra Cortés

Programación de fórmulas
Francisco Javier Rodríguez Cruz

Diagramación
Jesús García Alvarez

Procesos gráficos
Miguel Angel Ferreyra Cortés

Diseño de cubierta
Javier Perdomo M.

Producción
Guillermo González Dorantes

OBSERVACIONES SOBRE LAS FORMULAS

Magnitud de las cantidades físicas

La magnitud de una cantidad física es el producto de su valor numérico y la unidad física seleccionada. Por lo tanto, el valor numérico es el cociente de la magnitud y la unidad. Entonces, por definición,

$$\text{Magnitud} = \text{Valor numérico} \times \text{Unidad}$$

Si se selecciona una unidad *n* veces mayor, el valor numérico se reduce en la fracción 1/*n*; recíprocamente, si se adopta una unidad 1/*n* veces menor, el valor numérico es *n* veces mayor. El producto de valor numérico y unidad es constante, y la magnitud dada de una cantidad física es invariante en el cambio de unidad. Por ejemplo:

$$l = 15\ \text{m} = 15 \times 10^{-3}\ \text{km} = 15 \times 10^{3}\ \text{mm}$$
$$I = 3\ \mu\text{A} = 3 \times 10^{-3}\ \text{mA} = 0.003\ \text{mA}$$

TIPOS DE FORMULAS

Fórmulas de cantidades. Estas son las fórmulas normales en las que los símbolos corresponden a cantidades físicas. Permiten evaluar una cantidad sustituyendo las restantes por su magnitud (valor numérico por unidad). Al efectuar el cálculo se obtiene la magnitud de la cantidad por determinar. Por ejemplo, si en la fórmula $t = 2s/v$ se sabe què $s = 80$ m y $v = 8$ m/s, resulta entonces:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \times 80\ \text{m}}{8\ \text{m/s}} = \frac{160}{8}\ \text{s} = 20\ \text{s} \quad (\text{fórmula / 23})$$

Fórmulas de cantidades ajustadas. En estas ecuaciones cada símbolo de cantidad aparece dividido entre su correspondiente unidad. Por ejemplo, la fórmula s 78:

$$F_m \cong 40\left(\frac{B}{\text{T}}\right)^2\left(\frac{A}{\text{cm}^2}\right)\text{N} = 40\left(\frac{0.9\ \text{T}}{\text{T}}\right)^2\left(\frac{5\ \text{cm}^2}{\text{cm}^2}\right)\text{N} = 162\ \text{N}$$

Estas fórmulas son útiles en diversas aplicaciones.

Fórmulas de unidades. Conversión. Estas ecuaciones presentan la relación de equivalencia entre unidades. Por ejemplo:

$$1\ \text{m} = 100\ \text{cm} \qquad 1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Para efectuar la conversión de unidades, la equivalencia se expresa como un factor de valor numérico igual a la unidad. Así, de las fórmulas anteriores,

$$1 = \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = \frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}} \qquad 1 = \frac{1\ \text{kg} \cdot \text{m}}{1\ \text{N} \cdot \text{s}^2} = \frac{1\ \text{N} \cdot \text{s}^2}{1\ \text{kg} \cdot \text{m}}$$

Lo anterior permite obtener una magnitud en la unidad deseada, a partir de una ecuación de cantidades físicas. Por ejemplo, de la fórmula m 1:

$$F = ma$$

si $m = 30$ kg y $a = 4\ \text{cm/s}^2$, se tiene que para obtener F en newtons:

$$F = 30\ \text{kg} \times 4\ \text{cm/s}^2 = 30\ \text{kg} \left(\frac{1\ \text{N} \cdot \text{s}^2}{1\ \text{kg} \cdot \text{m}}\right) \times 4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)$$

$$= 1.2\ \text{N}$$

Unidades en las fórmulas. La designación EU significa "ejemplo de unidad." En varias fórmulas se indican ejemplos de unidades. En tales casos, la primera unidad indicada es la SI. Las demás unidades son de otros sistemas que todavía se emplean en algunos países. Por ejemplo, del sistema técnico métrico o del sistema técnico inglés.

La gran mayoría de las fórmulas presentadas en este manual son las normales de cantidades físicas, en las que se aplican las unidades compatibles que corresponden a las cantidades.

NOMENCLATURA GENERAL

Espacio y tiempo

α, β, γ	ángulos (planos)
Ω	ángulo sólido
l	longitud
b	anchura
h	altura
s	espesor
r, R	radio
d, D	diámetro
p, P	perímetro
A	área, sección transversal
A_l	área lateral
A_t	área total
V	volumen
s	recorrido
t	tiempo
v	velocidad
a	aceleración
g	aceleración debida a la gravedad
ω	velocidad angular
α	aceleración angular

Probabilidad y estadística

$A, B, \ldots$	eventos (simples o compuestos)
U	evento universal
$\varnothing$	evento nulo (o vacío)
$A + B$	unión de los evento A y B
AB	intersección de los eventos A y B
$\mathrm{P}(A)$	probabilidad del evento A
$\mathrm{P}(A\|B)$	probabilidad (condicional) de A dado B
X	variable aleatoria
$\mathrm{P}_X(X_0)$	probabilidad de que X tome el valor X_0
$\mathrm{E}[g(X)]$	esperanza (matemática) de $g(X)$
$\bar{X}$	media (o valor medio) de X
σ	desviación estándar
σ^2	variancia
r	coeficiente de correlación

Fenómenos oscilatorios y similares

T	periodo
f	frecuencia
n	número de revoluciones por unidad de tiempo
ω	frecuencia (velocidad) angular
λ	longitud de onda
ϕ	ángulo de fase, defasamiento

Mecánica

m	masa
ρ	densidad
v	volumen específico
p	cantidad de movimiento (o ímpetu)
J	momento de inercia de masa
F	fuerza
G	peso (fuerza de gravedad)
M	momento de fuerza
p	presión
σ	esfuerzo axial (o normal)
τ	esfuerzo cortante (o tangencial)
ϵ	deformación axial
γ	deformación angular
E	módulo de elasticidad axial
G	módulo de elasticidad angular
Q	momento estático de área
I	momento de inercia de área
S	módulo de sección
μ	coeficiente de fricción dinámica
μ_0	coeficiente de fricción estática
η	viscosidad dinámica
υ	viscosidad cinemática
W	trabajo, energía

P	potencia
η	eficiencia

Térmica

t	temperatura
T	temperatura termodinámica
α	coeficiente de dilatación longitudinal
β	coeficiente de dilatación volumétrica
Q	calor
q	calor por unidad de masa
Φ	flujo de calor
ϕ	densidad de flujo de calor
κ	conductividad térmica
c_p	calor específico a presión constante
c_v	calor específico a volumen constante
k	relación de calores específicos
ℓ_f	calor de fusión
ℓ_v	calor de vaporización
ℓ_s	calor de sublimación
R	constante de un gas

Electricidad y magnetismo

I	corriente
V	tensión (voltaje), diferencia de potencial
$E, \mathscr{E}$	tensión inducida o generada (fuerza electromotriz)
R	resistencia
ρ	resistividad
α	coeficiente de temperatura de la resistencia
G	conductancia
γ	conductividad
Q	carga
C	capacitancia
ψ	flujo eléctrico
D	densidad de flujo eléctrico
E	intensidad de campo eléctrico
ϕ	flujo magnético
B	densidad de flujo magnético, inducción magnética
H	intensidad de campo magnético
L	inductancia
$\mathscr{F}$	fuerza magnetomotriz
$\mathscr{U}$	tensión magnética
$\mathscr{R}$	reluctancia
$\mathscr{P}$	permeancia
ϵ	permisividad dieléctrica
ϵ_0	permisividad dieléctrica del vacío
ϵ_r	coeficiente dieléctrico (constante dieléctrica)
μ	permeabilidad magnética
μ_0	permeabilidad magnética del vacío
μ_r	coeficiente magnético (permeabilidad relativa)
p	número de pares de polos
z	número de conductores
N	número de vueltas o espiras
Z	impedancia
X	reactancia
Y	admitancia
S	susceptancia
P_a	potencia aparente
P	potencia activa
P_r	potencia reactiva

Optica (radiación visible)

c	velocidad de la luz en el vacío
I_v	intensidad luminosa
Φ_v	flujo lumínico
Q_v	cantidad de luz
E_v	iluminación
L_r	luminosidad (brillo)
n	índice de refracción
δ	potencia (o vergencia) de una lente
f	distancia focal
a	amplificación, aumento
s	distancia visual.

PARTE I

APLICACIONES BASICAS

El S.I.—Unidades

A 1

I. *La metrología internacional* *

En la actualidad se ha adoptado casi en todo el mundo el ***Sistema Internacional de Unidades***, que se simboliza por SI y es el resultado moderno de la evolución del sistema físico llamado MKS. El nombre oficial del SI es Système International d'Unités, y las normas respectivas las establece y actualiza el Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), con sede en Sèvres, París, Francia.

UNIDADES BASICAS

El SI tiene siete unidades básicas que corresponden a las cantidades físicas fundamentales del sistema, y son como sigue:

Cantidad fundamental	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad
Longitud (ℓ)	metro	m
Masa *(m)*	kilogramo	kg
Tiempo *(t)*	segundo	s
Temperatura termodinámica *(T)*	kelvin	K
Corriente eléctrica *(i)*	ampere	A
Intensidad luminosa *(I)*	candela	cd
Cantidad de sustancia *(n)*	mol	mol

El símbolo de cada unidad se halla estandarizado y es el mismo en todos los países; no deben usarse otros símbolos fuera de normalización.

Definiciones. La definición de cada una de las unidades básicas se expresa en seguida:

metro: Longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo igual a la fracción 1/299 792 458 de 1 s.

kilogramo: Masa del Kilogramo Prototipo Internacional conservado en la sede del BIPM.

segundo: Duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

kelvin: Fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica (o absoluta) del punto triple del agua (273.16 K).

---

* Mayores detalles pueden verse en la obra Manual TEC *Las unidades SI y otros sistemas,* F. Paniagua (Apdo. 30-488, México D.F. 06470).

ampere: Intensidad de la corriente eléctrica constante, que mantenida en dos conductores rectilíneos paralelos, de longitud infinita y sección transversal despreciable, y situados a la distancia de 1 m en el vacío, produce una fuerza de 2×10^{-7} N/m entre los conductores.

candela: Intensidad luminosa en una dirección dada, correspondiente a una energía de 1/683 W/sr, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia igual a 540×10^{12} Hz.

mol: Cantidad de entidades elementales (átomos, moléculas, iones, etc.) en un sistema material, igual al número de átomos existente en 0.012 kg de carbono 12. (El número es 6.0220×10^{23}, la constante de Avogadro.)

UNIDADES COMPLEMENTARIAS

Como unidades que complementan a las básicas se tienen las dos siguientes:

Cantidad complementaria	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad
Angulo plano (θ)	radián	rad
Angulo sólido (Ω)	estereorradián	sr

Sus definiciones son como sigue:

radián: Angulo comprendido entre dos radios de una circunferencia y que determina en esta curva un arco de longitud igual a la de su radio.

estereorradián: Angulo sólido con un vértice en el centro de una esfera, y que intercepta en ésta una superficie cuya área es igual a la de un cuadrado con lado igual al radio de la esfera.

MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS: PREFIJOS

Para ampliar o reducir el tamaño de una unidad SI se utilizan los múltiplos y submúltiplos de la misma, que se obtienen aplicando como factores, potencias del número 10. Para los múltiplos se tiene una sucesión que aumenta en 10^3 cada vez, y para los submúltiplos la reducción progresiva es en 10^{-3}. A fin de indicar lo anterior se utilizan prefijos que se aplican al nombre de la unidad SI. Tales prefijos son:

Nombre	*Símbolo*	*Valor multiplicativo*	
exa	E	10^{18}	(Múltiplos)
peta	P	10^{15}	
tera	T	10^{12}	
giga	G	10^{9}	
mega	M	10^{6}	
kilo	k	10^{3}	
mili	m	10^{-3}	(Submúltiplos)
micro	μ	10^{-6}	
nano	n	10^{-9}	
pico	p	10^{-12}	
fento	f	10^{-15}	
ato	a	10^{-18}	

Ejemplos: metro: m; kilómetro: km; milímetro: mm
ampere: A; miliampere: mA; microampere: μA
watt: W; kilowatt: kW; megawatt: MW; gigawatt: GW

$$1\ \text{mm}^2 = 1\ (10^{-3}\ \text{m})^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2 = 0.000\,001\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{ns}^{-1} = 1(10^{-9}\ \text{s})^{-1} = 10^{9}\ \text{s}^{-1}$$
$$1\ \text{PW} = 1\ (10^{15}\ \text{W}) = 10^{15}\ \text{W} = 10^{12}\ \text{kW}$$

En el caso del kilogramo, sus múltiplos y submúltiplos se forman tomando como base la unidad auxiliar gramo (g), igual a 10^{-3} kg. Por ejemplo, miligramo (mg) (= 10^{-3} g = 10^{-6} kg), microgramo (μg) (= 10^{-6} g = 10^{-9} kg), etc.

UNIDADES DERIVADAS

Para la mecánica se tienen las siguientes unidades derivadas de las básicas y que tienen nombre especial:

Fuerza (y peso)

newton (N): Fuerza que al ser aplicada a una masa de 1 kg le imparte una aceleración, en su misma dirección y sentido, igual a 1 m/s².

Presión y esfuerzo

pascal (Pa): Intensidad superficial de fuerza aplicada equivalente a 1 N/m².

Frecuencia o periodicidad

hertz (Hz): Variación periódica equivalente a un ciclo por segundo (c/s).

A 4 El S.I.—Unidades

Trabajo y energía

joule (J): Trabajo realizado por una fuerza de 1 N, cuando su punto de aplicación se desplaza una distancia de 1 m en la dirección y sentido de la fuerza.

Potencia y flujo de energía

watt (W): Potencia o flujo de energía que se desarrolla a razón de 1 J/s.

La unidad de energía joule (J) se aplica también a los fenómenos térmicos y de cualquier otra clase. Lo mismo corresponde al watt (W). Las unidades derivadas térmicas se determinan considerando el joule y el kelvin (K) o el grado Celsius (°C). Asimismo, las unidades derivadas eléctricas [volt (V), henry (H), etc.] y magnéticas [weber (Wb), tesla (T), etc.] se establecen a partir del ampere, el joule, el metro y el segundo.

UNIDADES AUXILIARES DEL SI

Se admite indefinidamente el empleo, junto con las del SI, de las siguientes unidades: de tiempo [minuto (min), hora (h), etc.] y de ángulo [grado (°), minuto (′) y segundo (″)]. De este modo, la tonelada (t), igual a 10^3 kg, y el litro (L), equivalente a 10^{-3} m^3.

Cuando no es necesario considerar temperaturas termodinámicas (a partir del cero absoluto) se utiliza el *grado Celsius* (°C), llamado anteriormente "centígrado". La escala Celsius va desde 0 °C (p. cong. del agua) hasta 100 °C (p. eb. del agua).

La relación con la escala Kelvin es

$$T \text{ (en kelvins)} = t \text{ (en °C)} + 273.15$$ a 1

También se admite la unidad de presión *bar* (b), igual a 10^5 N/m². Se tiene que

$$1 \text{ b} = 10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$
$$1 \text{ mb} = 100 \text{ Pa} = 10^5 \text{ mPa}$$

NORMAS DE USO DEL SI

1. Los valores numéricos con cinco cifras o más deben separarse a cada lado de la marca decimal (punto o coma) en grupos de tres, mediante un espacio pequeño. Ejemplos: 61 154, 61 354 000, 0.982 03. En el caso de valores numéricos menores que la unidad se usa siempre el cero antes de la marca decimal. Ejemplo: 0.152, 0.000 13.

2. En las unidades compuestas los símbolos se combinan con los signos de producto (·) o de cociente (/). Para mayor claridad pueden utilizarse exponentes negativos y no se debe usar más de una raya diagonal en la expresión. Ejemplos: N · m, m/s, kg · m/s², J/(kg · K); o bien, $m \cdot s^{-1}$, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, etc.

II. Las metrologías técnicas métrica e inglesa *

En algunos países de habla española aún se utilizan en la industria las unidades de los llamados Sistema Técnico (ST) y Sistema Inglés (US), que van desapareciendo a medida que se extiende el uso obligatorio del SI.

Unidades ST. Son las de uso antiguo en ingeniería. Se basan en la unidad gravitacional denominada *kilogramo fuerza* (kgf), que es una unidad fundamental junto con el metro y el segundo. Su definición es: Peso, en el vacío, del kilogramo (kg) al nivel del mar) y a 45° de latitud, donde $g_0 = 9.806\ 65\ m/s^2$.

Es decir,

a 2
$$1\ kgf = 1\ kg \cdot 9.806\ 65\ m/s^2 = 9.806\ 65\ kg \cdot m/s^2$$
$$= 9.806\ 65\ N \approx 9.8\ N$$

Aproximadamente, 1 kgf ≈ 10 N

Las unidades derivadas principales son:

Fuerza (y peso):	tonelada fuerza (tf) = 10^3 kgf
Presión y esfuerzo:	kgf/m^2, kgf/cm^2, tf/m^2, tf/cm^2, etc.
Trabajo y energía:	kilográmetro (kgf · m)
Potencia:	kilográmetro por segundo (kgf · m/s).

La unidad de masa, denominada unidad técnica de masa (utm) se define como:

a 3
$$1\ utm = \frac{1\ kgf}{1\ m/s^2} = 9.806\ 65\ kg \approx 9.8\ kg$$

Aproximadamente, 1 utm ≈ 10 kg. (No se emplea en la práctica la unidad técnica de masa.)

Unidades US. La denominación proviene del nombre U.S. Customary Units, que se emplea en Estados Unidos de América para designar a este antiguo sistema de unidades originado en Inglaterra. Aquel país

* Mayores detalles pueden verse en la obra citada en A1.

es prácticamente el único del mundo que no ha adoptado como obligatorio el SI. La institución denominada United States Metric Association (USMA), promueve intensamente el conocimiento y la adopción general del SI en todos los campos: educativos, comerciales, tecnológicos, etc.

Estas unidades son también las de uso antiguo en ingeniería en los países de habla inglesa. Se fundan en la unidad gravitacional de nombre *libra fuerza* (lbf), que es una unidad básica junto con el pie (pie) y el segundo (s). Su definición original era: Peso, en el vacío, de la libra (masa) (lb) al nivel del mar y a 45° de latitud, donde $g_0 = 32.1740$ pie/s^2.

Es decir,

$$1 \text{ lbf} = 1 \text{ lb} \cdot 32.1740 \text{ pie/s}^2 = 32.1740 \text{ lb} \cdot \text{pie/s}^2 \qquad \text{a 4}$$

En la actualidad, el pie, la libra y la libra fuerza se definen en función de las unidades métricas:

$$1 \text{ pie} = 0.3048 \text{ m} \qquad \text{a 5}$$

$$1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg} \qquad \text{a 6}$$

$$1 \text{ lbf} = 0.4536 \text{ kgf} = 4.4482 \text{ N} \qquad \text{a 7}$$

A continuación se expresan las equivalencias principales de las unidades US dentro del mismo sistema:

$$1 \text{ pulgada (plg)} = \frac{1}{12} \text{ pie, } 1 \text{ yarda (yd)} = 3 \text{ pie, } 1 \text{ milla (mi)} = 5\,280 \text{ pie} \qquad \text{a 8}$$

$$1 \text{ tonelada (ton)} = 2\,000 \text{ lb, } 1 \text{ kilolibra fuerza (kip)} = 1\,000 \text{ lbf} \qquad \text{a 9}$$

La unidad de masa, denominada slug, tiene por definición:

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lbf}}{1 \text{ pie/s}^2} = 32.1740 \text{ lb} \approx 32.2 \text{ lb} \qquad \text{a 10}$$

Aproximadamente, 1 slug ≈ 32 lb. (Tampoco se emplea mucho en la práctica el slug.)

La unidad de temperatura, el grado Fahrenheit (°F), es la fracción 1/180 del intervalo entre 32 °F (p. cong. del agua) y 212 °F (p. eb. del agua). La conversión a grados Celsius (°C) es

$$t(°C) = \frac{t(°F) - 32}{1.8} = \frac{5}{9}\,[t(°F) - 32] \qquad \text{a 11}$$

El S.I.—Unidades | A 7

III. Equivalencias de unidades métricas usuales *

LONGITUD

a 12 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm = 10^{12} pm

a 13 1 m = 10^{-3} km = 10^{-6} Mm = 10^{-9} Gm = 10^{-12} Tm = 10^{-15} Pm

a 14 1 mm = 10^{-3} μm = 10^6 nm = 10^9 pm = 10^7 Å (angstrom) = 10^{10} mÅ

AREA

a 15 1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2

a 16 1 km^2 = 10^6 m^2 = 100 ha (hectárea)

VOLUMEN

a 17 1 m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^3 L (litro) = 10 hL (hectolitro)

a 18 1 km^3 = 10^9 m^3 = 10^{12} L

MASA

a 19 1 kg = 10^3 g = 10^6 mg = 10^9 μg (microgramo)

a 20 1 Mg = 10^3 kg = 1 t (tonelada métrica)

a 21 1 utm = 9.8066 kg

TIEMPO

a 22 1 s = 10^3 ms = 10^6 μs = 10^9 ns = 10^{12} ps = $\frac{1}{60}$ min

a 23 1 h = 60 min = 3600 s

a 24 1 d = 24 h = 1440 min = 86 400 s

FUERZA

a 25 1 kgf = 9.8066 N = 10^{-3} tf (tonelada fuerza)

a 26 1 dina = 10^{-5} N = 0.01 mN = 0.102 × 10^{-5} kgf

---

* Para pasar de las unidades indicadas a la derecha del primer signo =, a la del primer término, se divide entre el factor expresado. Por ejemplo,

1 cm = $\frac{1}{100}$ m = 10^{-2} m; 1 mm = 10^{-3} m; 1 km = $\frac{1}{10^{-3}}$ m = 10^3 m

1 g = 10^{-3} kg; 1 N = $\frac{1}{9.81}$ kgf = 0.102 kgf

A 8 El S.I.—Unidades

PRESION Y ESFUERZO

1 kgf/cm^2 = 98.066 kN/m^2 = 98.066 kPa a 27

1 b (bar) = 10^5 Pa = 100 kPa = 1.02 kgf/cm^2 a 28

1 torr (mm Hg) = 133 Pa = 1.33 × 10^{-3} b = 1.33 mb a 29

TRABAJO Y ENERGIA

1 kgf · m = 9.8066 J = 0.239 × 10^{-2} kcal (kilocaloría) a 30

1 kcal = 4 186.8 J = 4.187 kJ a 31

1 kW · h = 3.6 × 10^6 J = 3.6 MJ a 32

POTENCIA

1 kgf · m/s = 9.8066 W = 9.81 × 10^{-3} kW a 33

1 kcal/h = 1.16 W = 1.16 × 10^{-3} kW a 34

IV. Equivalencias métricas de unidades inglesas usuales *

LONGITUD

1 pie (pie) = 0.3048 m a 35

1 pulgada (plg) = 0.0254 m = 25.4 mm (por definición) a 36

1 yarda (yd) = 0.9144 m a 37

1 milla (mi) = 1 609 m = 1.609 km a 38

1 milla náutica (nmi) = 1 852 m = 1.852 km a 39

AREA

1 pie^2 = 0.0929 m^2 = 929 cm^2 a 40

1 plg^2 = 6.452 × 10^{-4} m^2 = 6.452 cm^2 a 41

1 yd^2 = 0.8361 m^2 = 8 361 cm^2 a 42

VOLUMEN

1 pie^3 = 0.0283 m^3 = 28.3 L a 43

1 plg^3 = 1.6387 × 10^{-5} m^3 = 16.387 cm^3 a 44

1 galón (gal) = 3.7854 × 10^{-3} m^3 = 3.785 L (líquidos) a 45

---

* Se aplica el mismo procedimiento indicado para las unidades métricas en la interconversión de las unidades.

MASA

a 46 1 lb = 0.4536 kg = 453.6 g

a 47 1 tonelada (ton) = 907.18 kg = 0.9072 t

a 48 1 slug = 14.594 kg

a 49 1 onza (oz) = 0.02835 kg = 28.35 g

FUERZA

a 50 1 lbf = 4.4482 N = 0.4536 kgf

a 51 1 kip = 4.4482 kN = 453.6 kgf

a 52 1 tonf = 8.8964 kN = 907.2 kgf

PRESION Y ESFUERZO

a 53 1 lbf/plg^2 (psi) = 6.8947 kPa = 0.07031 kgf/cm^2

a 54 1 lbf/pie^2 (psf) = 47.8802 Pa = 4.8825 kgf/m^2

a 55 1 kip/plg^2 (ksi) = 6.8947 MPa = 70.3081 kgf/cm^2

a 56 1 kip/pie^2 (ksf) = 47.8802 kPa = 4.8825×10^3 kgf/m^2

a 57 1 plg Hg = 3.3768 kPa = 33.768 mb = 25.4 torr = 0.0345 kgf/cm^2

TRABAJO Y ENERGIA

a 58 1 pie · lbf = 1.3558 J = 0.1382 kgf · m

a 59 1 Btu = 1 055 J = 1.0550 kJ = 0.252 kcal

POTENCIA

a 60 1 pie · lbf/s = 1.3558 W = 0.1382 kgf · m/s

a 61 1 caballo (hp) = 746 W = 0.746 kW

a 62 1 Btu/s = 1.0550 kW = 0.252 kcal/s

V. Equivalencias de diversas unidades

a 63 1 gal (Gran Bretaña) = 4.546 m^3 = 4.546 L

a 64 1 long ton (GB) = 2 240 lb = 1 016 kg

a 65 1 quilate (métrico) = 200 mg

Superficies

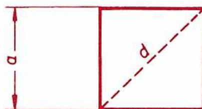
B 1

Cuadrado

b 1 $A = a^2$

b 2 $a = \sqrt{A}$

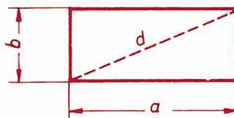
b 3 $d = a\sqrt{2}$



Rectángulo

b 4 $A = a\,b$

b 5 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

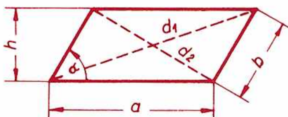


Paralelogramo

b 6 $A = a\,h = a\,b\,\text{sen}\,\alpha$

b 7 $d_1 = \sqrt{(a + h\cot\alpha)^2 + h^2}$

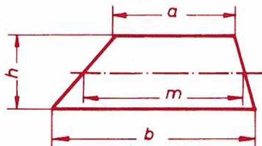
b 8 $d_2 = \sqrt{(a - h\cot\alpha)^2 + h^2}$



Trapecio

b 9 $A = \dfrac{a + b}{2}\,h = m\,h$

b 10 $m = \dfrac{a + b}{2}$

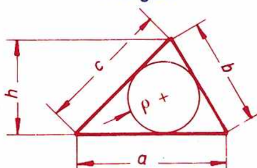


Triángulo

b 11 $A = \dfrac{a\,h}{2} = \rho\,s$

b 12 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

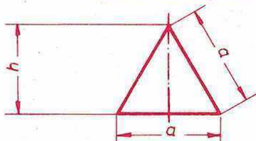
b 13 $s = \dfrac{a + b + c}{2}$



Triángulo equilátero

b 14 $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

b 15 $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



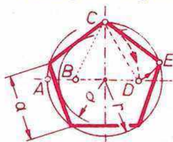
Pentágono regular

b 16 $A = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

b 17 $a = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

b 18 $\rho = \frac{1}{4} r \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

Construcción:
$AB = 0.5\,r$, $BC = BD$, $CD = CE$



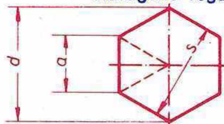
Hexágono regular

b 19 $A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$

b 20 $d = 2\,a$

b 21 $\quad = \frac{2}{\sqrt{3}} s \cong 1.155\,s$

b 22 $s = \frac{\sqrt{3}}{2} d \cong 0.866\,d$



Octágono regular

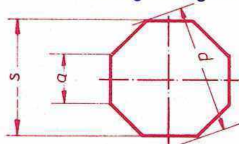
b 23 $A = 2\,a\,s \cong 0.83\,s^2$

b 24 $\quad = 2\,s\sqrt{d^2 - s^2}$

b 25 $a = s \tan 22.5° \cong 0.415\,s$

b 26 $s = d \cos 22.5° \cong 0.924\,d$

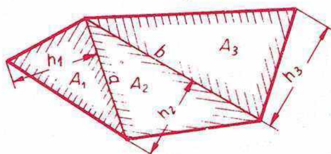
b 27 $d = \frac{s}{\cos 22.5°} \cong 1.083\,s$



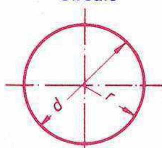
Polígono

b 28 $A = A_1 + A_2 + A_3$

b 29 $\quad = \frac{a\,h_1 + b\,h_2 + b\,h_3}{2}$



Círculo

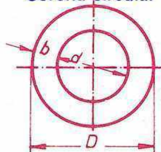


b 30 $A = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi r^2$

b 31 $\cong 0.785\, d^2$

b 32 $P = 2\pi r = \pi d$

Corona circular

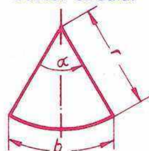


b 33 $A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$

b 34 $= \pi (d + b)\, b$

b 35 $b = \frac{D - d}{2}$

Sector circular



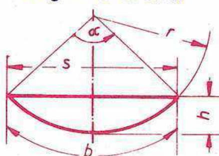
b 36 $A = \frac{\pi}{360} r^2 \alpha = \frac{\hat{\alpha}}{2} r^2$

b 37 $= \frac{b\,r}{2}$

b 38 $b = \frac{\pi}{180} r\, \alpha$

b 39 $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \alpha$ ($\hat{\alpha} = \alpha$ en radianes)

Segmento circular



b 40 $s = 2\, r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

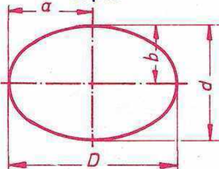
b 41 $A = \frac{h}{6s} (3h^2 + 4s^2) = \frac{r^2}{2} (\hat{\alpha} - \operatorname{sen} \alpha)$

b 42 $r = \frac{h}{2} + \frac{s^2}{8h}$

b 43 $h = r(1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = \frac{s}{2} \tan \frac{\alpha}{4}$

b 44 $\hat{\alpha}$: Ver fórmula b 39.

Elipse



b 45 $A = \frac{\pi}{4} D\, d = \pi\, a\, b$

b 46 $P \cong \pi \frac{D + d}{2}$

b 47 $= \pi (a + b) \left[1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{1}{256} \lambda^6 + \frac{25}{16\,384} \lambda^8 + \ldots \right]$, donde $\lambda = \frac{a - b}{a + b}$

Cuerpos

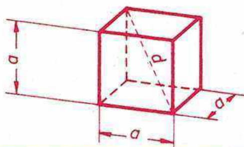
C 1

Cubo

c 1 $V = a^3$

c 2 $A = 6\,a^2$

c 3 $d = \sqrt{3}\,a$

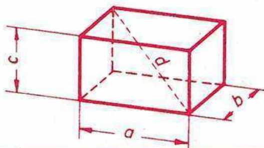


Prisma rectangular (recto)

c 4 $V = a\,b\,c$

c 5 $A = 2(a\,b + a\,c + b\,c)$

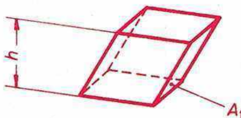
c 6 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Prisma oblicuo

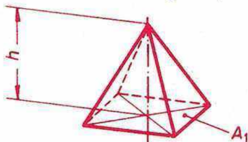
c 7 $V = A_1\,h$

(Principio de Cavalieri)



Pirámide rectangular (recta)

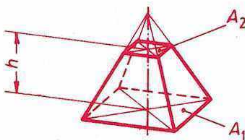
c 8 $V = \dfrac{A_1\,h}{3}$



Pirámide truncada

c 9 $V = \dfrac{h}{3}\,(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1\,A_2})$

c 10 $\cong h\,\dfrac{A_1 + A_2}{2}$



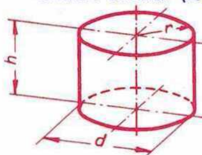
Cuerpos

Cilindro circular (recto)

c 11 $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

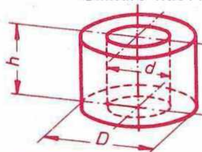
c 12 $A_l = 2 \pi r h$

c 13 $A_t = 2 \pi r (r + h)$



Cilindro hueco

c 14 $V = \frac{\pi}{4} h (D^2 - d^2)$



Cono circular (recto)

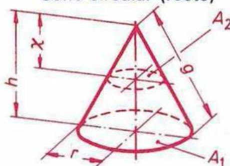
c 15 $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

c 16 $A_l = \pi r g$

c 17 $A_t = \pi r (r + g)$

c 18 $g = \sqrt{h^2 + r^2}$

c 19 $A_2 : A_1 = x^2 : h^2$

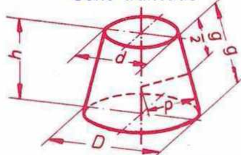


Cono truncado

c 20 $V = \frac{\pi}{12} h (D^2 + Dd + d^2)$

c 21 $A_l = \frac{\pi}{2} g (D + d) = 2 \pi p h$

c 22 $g = \sqrt{[(D - d)/2]^2 + h^2}$

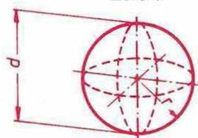


Esfera

c 23 $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3$

c 24 $\cong 4.189\, r^3$

c 25 $A = 4 \pi r^2 = \pi d^2$

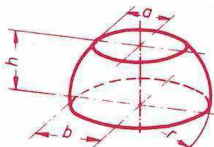


Segmento esférico truncado

c 26 $V = \frac{\pi}{6} h \, (3a^2 + 3b^2 + h^2)$

c 27 $A_l = 2\pi r h$ (Zona esférica)

c 28 $A_t = \pi \, (2rh + a^2 + b^2)$



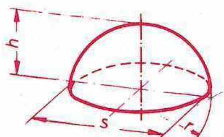
Segmento esférico

c 29 $V = \frac{\pi}{6} h \, (\frac{3}{4} s^2 + h^2)$

$= \pi h^2 \, (r - \frac{h}{3})$

c 30 $A_l = 2\pi r h$ (Casquete esférico)

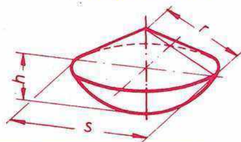
c 31 $= \frac{\pi}{4} (s^2 + 4h^2)$



Sector esférico

c 32 $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$

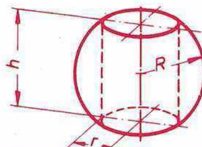
c 33 $A_t = \frac{\pi}{2} r \, (4h + s)$



Esfera con perforación cilíndrica

c 34 $V = \frac{\pi}{6} h^3$

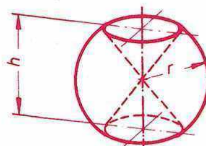
c 35 $A_t = 2\pi h \, (R + r)$



Esfera con perforaciones cónicas

c 36 $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$

c 37 $A_t = 2\pi r \left(h + \sqrt{r^2 - h^2/4} \right)$

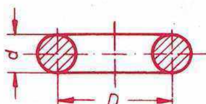


Cuerpos

Toro (anillo de sección circular)

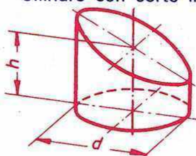
c 38 $V = \frac{\pi^2}{4} D\, d^2$

c 39 $A = \pi^2 D\, d$



Cilindro con corte inclinado

c 40 $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

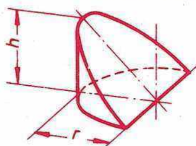


Cuña cilíndrica

c 41 $V = \frac{2}{3} r^2 h$

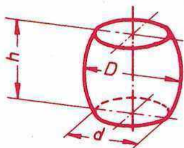
c 42 $A_l = 2\, r\, h$

c 43 $A_t = A_l + \frac{\pi}{2} r^2 + \frac{\pi}{2} r \sqrt{r^2 + h^2}$



Barril

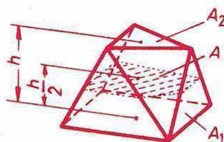
c 44 $V \cong \frac{\pi}{12} h\, (2\, D^2 + d^2)$



Prismatoide

c 45 $V = \frac{h}{6} (A_1 + A_2 + 4\, A)$

Esta fórmula se aplica también a los cuerpos de las partes C1 a C3, incluso para la esfera y sus porciones.



FORMULAS PARA POTENCIAS Y RAICES

	General	Ejemplos
d 1	$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q)\, a^n$	$3a^4 + 4a^4 = 7a^4$
d 2	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^8 \cdot a^4 = a^{12}$
d 3	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{a^8}{a^2} = a^{8-2} = a^6$
d 4	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$	$(a^3)^2 = (a^2)^3 = a^{3\times 2} = a^6$
d 5	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{-4} = \dfrac{1}{a^4}$
d 6	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{a^3}{b^3} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$
d 7	$p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$	$4\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} = 11\sqrt[3]{x}$
d 8	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{16 \times 81} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81}$
d 9	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$
d 10	$\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}$
d 11	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ *	$\sqrt[4]{a^3} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{4}}$
d 12	$\sqrt{-a} = \mathrm{i}\sqrt{a}$	$\sqrt{-9} = \mathrm{i}\sqrt{9} = \mathrm{i}\,3$

*No es válida en algunos casos; p. ej., $\sqrt{(-2)^2} = +2$

$\left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$

Nota: Los exponentes para potencias y raíces deben ser escalares.

LOGARITMOS

	Sistema	Base del sistema	Denominación
d 13	$\log_a$	a	Logaritmo de base a
d 14	$\log_{10} = \log$*	10	Logaritmo común
d 15	$\log_e = \ln$	e	Logaritmo natural
d 16	$\log_2 = \text{lb}$	2	Logaritmo binario

En $\log_a x = b$ se llaman: a, base
x, logaritmando
b, logaritmo

Reglas para el cálculo con logaritmos (de base cualquiera)

d 17 $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

d 18 $\log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$

d 19 $\log x^n = n \log x$

d 20 $\log \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log x$

Igualdad entre expresiones con exponentes

d 21 $a^x = b = e^{x \ln a}$

d 22 de donde: $x = \dfrac{\log b}{\log a}$ | $a = \sqrt[x]{b}$

Transformación de logaritmos

d 23 $\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \ln x = 0.434294 \cdot \ln x$

d 24 $\ln x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = 2.302585 \cdot \log_{10} x$

d 25 Base de los logaritmos naturales: $e = 2.718\,281\,83\ldots$

Características de logaritmos de base 10

d 26 $\log 0.01 = -2$ o bien, $8\ldots - 10$
d 27 $\log 0.1 = -1$ o bien, $9\ldots - 10$
d 28 $\log 1 = 0$
d 29 $\log 10 = 1$
d 30 $\log 100 = 2$

Nota: El logaritmando (o antilogaritmo) debe ser un valor numérico.
*También se usa la notación lg.

TRANSFORMACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS USUALES

d 31 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^2$

d 32 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3$

d 33 $$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots + b^n$$

d 34 $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

d 35 $(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$

d 36 $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

d 37 $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

d 38 $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

d 39 $$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$



Ecuación cuadrática o de segundo grado

d 40 Forma normal $x^2 + px + q = 0$

d 41 Raíces $x_1\,;\,x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

d 42 Teorema de Vieta $p = -(x_1 + x_2);\; q = x_1 \cdot x_2$

Cálculo aritmético de la raíz cuadrada

Ejemplo	Explicación Los valores entre paréntesis se refieren al ejemplo.
$\sqrt{21\,43.69} = 46.3$ 16 5 43 : 86 5 16 27 69 : 923 27 69 0	a) Hacia la derecha y hacia la izquierda del punto decimal formar grupos de dos cifras. b) Obtener la raíz cuadrada del primer grupo (21). Registrar como primera cifra del resultado el número entero así obtenido (4), elevarlo al cuadrado (16) y restarlo del primer grupo para tener un residuo (5).

c) Bajar el siguiente grupo (43), y dividir entre el doble del resultado obtenido hasta el momento ($2 \times 4 = 8$) las cifras anteriores menos la última ($54 : 8 = 6$). Registrar el cociente (6) como siguiente cifra de la raíz. Agregar este número al doble del resultado anterior (8) Multiplicar el divisor así obtenido (86) por la última cifra del resultado (6) ($516 = 86 \times 6$). Calcular la diferencia (27).

d) Repetir el procedimiento hasta terminar.

Determinación aproximada de una raíz

d 43 Si $x = \sqrt[n]{A}$, entonces $x = \frac{1}{n}\left[(n-1)\,x_0 + \frac{A}{x_0^{\,n-1}}\right]$

donde x_0 es el valor estimado de x. Sustituciones de valores sucesivos de x_0 aumentarán la exactitud del valor de x.

BINOMIO DE NEWTON



d 44 $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \ldots$

n tiene que ser un número entero

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots n-k+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots k}$$

d 45 $(a+b)^4 = 1\,a^4 + \frac{4}{1} a^{4-1} \cdot b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^{4-2} \cdot b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{4-3} \cdot b^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3 \cdot b + 6a^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^3 + b^4$

Resolución esquemática. Coeficientes por el Triángulo de Pascal

d 46 $(a+b)^0$ — 1

d 47 $(a+b)^1$ — 1 1

d 48 $(a+b)^2$ — 1 2 1

d 49 $(a+b)^3$ — 1 3 3 1

d 50 $(a+b)^4$ — 1 4 6 4 1

d 51 $(a+b)^5$ — 1 5 10 10 5 1

d 52 $(a+b)^6$ — 1 6 15 20 15 6 1

Se continúa de manera que cada renglón empiece y termine en 1. Los números restantes son la suma de los dos números situados inmediatamente arriba a la derecha y a la izquierda.

Exponentes

La suma de los exponentes de *a* y *b* en cada término es igual al exponente *n* del binomio. Cuando disminuye el exponente de *a* aumenta el de *b*.

Signos

En $(a+b)$ todos son positivos.

En $(a-b)$ se empieza con $+$ y luego se van alternando.

Ejemplos

d 53 $(a+b)^5 = \quad a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

d 54 $(a-b)^5 = (+)\, a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$

PERMUTACIONES

Número de permutaciones de n elementos*:

d 55 $$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$$

Ejemplo: Los $n = 3$ elementos a, b, c pueden permutarse de las seis maneras siguientes:

abc *bac* *cab*
acb *bca* *cba*

d 56 $$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ permutaciones}$$

Caso especial: Si al permutar n elementos existen n_1 elementos del tipo 1, n_2 elementos tipo 2, . . ., y n_k elementos del tipo k, entonces:

d 57 $$P_{n,\,k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

Ejemplo: Los $n = 3$ elementos a, a, b pueden permutarse de tres maneras diferentes:

aab *aba* *baa*

En este caso $n = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$; por lo que

d 58 $$P_{3,\,2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 3 \text{ permutaciones}$$

COMBINACIONES Y ORDENACIONES

El número de modos diferentes en que pueden asociarse los elementos de un conjunto de n de ellos tomando k cada vez, *sin* tener en cuenta su orden, se llama número de *combinaciones*. Hay que especificar si los elementos se repiten o no.

Considerando el orden de los elementos se habla de *ordenaciones*.

La tabla D 6 presenta las fórmulas de combinaciones y ordenaciones, con y sin repetición de elementos.

* *n!* recibe el nombre de *factorial n*.

d 62  d 61  d 60  d 59 

(Explicación en D 5)

		Número de combinaciones sin repetición	Número de combinaciones con repetición	Número de ordenaciones sin repetición	Número de ordenaciones con repetición
Fórmulas		$C_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$	${}^rC_k^n = \binom{n+k-1}{k}$ r con repetición	$O_k^n = C_k^n \cdot P_k = \binom{n}{k} k!$ $= \dfrac{n!}{(n-k)!}$	${}^rO_k^n = n^k$
Significado de los símbolos		C : número de combinaciones posibles n : número de elementos dados k : número de elementos seleccionados de entre n elementos dados		O : número de ordenaciones posibles	
Ejemplos	Datos	$n = 3$ elementos: a, b, c $k = 2$ elementos seleccionados del conjunto de 3			
Ejemplos	Posibilidades	. *ab* *ac* . . *bc* . . .	*aa* *ab* *ac* . *bb* *bc* . . *cc*	. *ab* *ac* *ba* . *bc* *ca* *cb* .	*aa* *ab* *ac* *ba* *bb* *bc* *ca* *cb* *cc*
Ejemplos	Cálculo del número de posibilidades	$C_2^3 = \binom{3}{2}$ $= \dfrac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$	${}^rC_2^3 = \binom{3+2-1}{2}$ $= \binom{4}{2}$ $= \dfrac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$	$O_2^3 = \binom{3}{2} 2!$ $= \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3!}{1!}$ $= \dfrac{1 \times 2 \times 3}{1} = 6$	${}^rO_2^3 = 3^2$ $= 9$
Ejemplos	Observaciones	Los grupos *ab* y *ba*, por ejemplo, pertenecen a la misma combinación		Los grupos *ab* y *ba*, por ejemplo, pertenecen a ordenaciones diferentes	

Determinantes de dos renglones o filas:



d 63

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = r_1 \qquad a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = r_2$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

(diagonales: $-$ / $+$)

Poner la columna de r en vez de la

columna de x	columna de y
$D_1 = \begin{vmatrix} r_1 & a_{12} \\ r_2 & a_{22} \end{vmatrix} = r_1 a_{22} - r_2\,a_{12}$	$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & r_1 \\ a_{21} & r_2 \end{vmatrix} = r_2\,a_{11} - r_1\,a_{21}$
$x = \dfrac{D_1}{D}$	$y = \dfrac{D_2}{D}$



d 64

Determinantes de tres renglones (regla de Sarrus):

d 65

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = r_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = r_2$$
$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = r_3$$



d 66

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

(diagonales: $-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$)

Sustituir la columna de x por la de r:



d 67

$$D_1 = \begin{vmatrix} r_1 & a_{12} & a_{13} & r_1 & a_{12} \\ r_2 & a_{22} & a_{23} & r_2 & a_{22} \\ r_3 & a_{32} & a_{33} & r_3 & a_{32} \end{vmatrix} = r_1 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot r_3 + a_{13} \cdot r_2 \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot r_3 - r_1 \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot r_2 \cdot a_{33}$$

(diagonales: $-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$)

Desarrollar D_2 y D_3 de igual manera, sustituyendo la columna de y o z por la de r; por lo tanto,

d 68

$$x = \frac{D_1}{D} \qquad y = \frac{D_2}{D} \qquad z = \frac{D_3}{D}$$

Determinantes de más de dos renglones:

(En un determinante de más de 3 renglones también puede aplicarse la regla de Sarrus, de acuerdo con D 7).

Formar una matriz y mediante adición o sustracción de dos o más renglones, transformados previamente por multiplicación o división, introducir elementos nulos.

Desarrollar el determinante por renglones o columnas con el mayor número de elementos nulos, e introducir signos alternadamente (comenzar con $+$ en a_{11}).

Ejemplo:

d 69

$$\begin{matrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & \overset{-}{0} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \overset{+}{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \overset{-}{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \overset{+}{0} \end{matrix}$$

Desarrollo para la cuarta columna:

d 70

$$a_{24}\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad - a_{34}\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Debido a que no se pueden introducir ceros como en el caso anterior, puede hacerse el siguiente desarrollo. Por ejemplo, con los primeros renglones:

d 71

$$D = a_{24}\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\right) - a_{34}\left(\ldots \right)$$

Para los determinantes inferiores $D_1, D_2, \ldots,$ introducir las columnas de r de acuerdo con la página D 7 y luego desarrollar como el determinante D.
Obtención de las n incógnitas $u_1, \ldots, u_n$ con las fórmulas:

d 72

$$u_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad u_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \; u_n = \frac{D_n}{D}$$

Nota: Para un determinante de n renglones se hará el desarrollo hasta obtener determinantes de tres renglones.

SERIE ARITMETICA

La sucesión 1, 4, 7, 10, etc., se llama **progresión aritmética**. (La diferencia d entre dos términos consecutivos es constante.) La suma de una progresión se llama **serie**.



d 73 $$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = a_1 n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{en donde } d = a_n - a_{n-1}$$

d 74 $$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Media aritmética: cada término a_m de una progresión aritmética es la media aritmética de sus términos adyacentes a_{m-1} y a_{m+1}.

d 75 Así, el *m*-ésimo término es $a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$ para $1 < m < n$

(por ejemplo, en la serie anterior $a_3 = \frac{4 + 10}{2} = 7$).

SERIE GEOMETRICA

La sucesión 1, 2, 4, 8, etc., se llama **progresión geométrica**. (El cociente **q** de dos términos consecutivos es constante y se llama "razón" de la serie.)



d 76 $$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q \cdot a_n - a_1}{q - 1} \quad \text{para} \quad q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

d 77 $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Media geométrica: cada término a_m de una serie geométrica es la media geométrica de sus términos adyacentes a_{m-1} y a_{m+1}.

d 78 Así, el *m*-ésimo término es $a_m = \sqrt{a_{m-1} \cdot a_{m+1}}$ para $1 < m < n$

(por ejemplo, en la serie anterior $a_3 = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$)

Para las series geométricas infinitas ($n \to \infty$, $|q| < 1$), se aplican las siguientes ecuaciones:

d 79 $$a_n = \lim_{n \to \infty} a_n = 0; \qquad s_n = \lim_{n \to \infty} s_n = a_1 \frac{1}{1 - q}$$

SERIE GEOMETRICA DECIMAL

Aplicación al cálculo de series normalizadas de números.

El cociente de dos términos consecutivos se llama "relación progresiva φ".

d 80 $$\varphi = \sqrt[b]{10} \qquad b \geq 1, \text{ entero.}$$

b determina la cantidad de términos o números normalizados de una serie en una década. Los valores de los términos que se deben redondear se calculan de acuerdo con d 77:

d 81 $$a_n = a_1 (\sqrt[b]{10})^{n-1} = a_n (10^{1/b})^{n-1} \qquad n = 1 \ldots b$$

Comenzando con $a_1 = 1$ o $a_1 = 10$ o $a_1 = 100$ o ...

Ejemplos:

b	designación	nota
6, 12, 24, ...	E 6, E 12, E 24, ...	serie E internacional, ver Z 2
5, 10, 20, ...	R 5, R 10, R 20, ...	serie DIN, ver R' 1

a_1: término inicial
a_n: término final
d : diferencia de dos términos consecutivos
n : cantidad de términos
s_n: suma hasta *n* términos
q : cociente de dos términos consecutivos

SERIE BINOMICA O BINOMIAL

d 82 $$f(x) = (1 \pm x)^{\alpha} = 1 \pm \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 \pm \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$$

α es un número cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario.

Fórmula del coeficiente binómico.

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n}$$

Ejemplos:

		para
d 83	$\dfrac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$	$\lvert x \rvert < 1$
d 84	$\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{8} x^2 \pm \dfrac{1}{16} x^3 - \dots$	$\lvert x \rvert < 1$
d 85	$\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \dfrac{1}{2} x + \dfrac{3}{8} x^2 \mp \dfrac{5}{16} x^3 + \dots$	$\lvert x \rvert < 1$

SERIE DE TAYLOR (SERIE DE MACLAURIN)

d 86 $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

De aquí que la forma de Maclaurin, cuando $a = 0$ es

d 87 $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Ejemplos:

		para
d 88	$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$	toda x
d 89	$a^x = 1 + \dfrac{x \cdot \ln a}{1!} + \dfrac{(x \cdot \ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x \cdot \ln a)^3}{3!} + \dots$	toda x
d 90	$\ln x = 2\left[\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right]$	$x > 0$
d 91	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dots$	$-1 < x$ $x \leqq +1$
d 92	$\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dots$	

(Continúa en D 11)

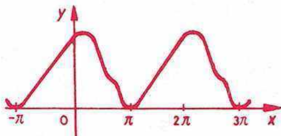
SERIE DE TAYLOR
(Continuación)

Ejemplos:

		para
d 93	$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	toda x
d 94	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	toda x
d 95	$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
d 96	$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots$	$0 < \lvert x \rvert$ $\lvert x \rvert < \pi$
d 97	$\operatorname{sen}^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$	$\lvert x \rvert \leqq 1$
d 98	$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}x$	$\lvert x \rvert \leqq 1$
d 99	$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$	$\lvert x \rvert \leqq 1$
d 100	$\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$	$\lvert x \rvert \leqq 1$
d 101	$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$	toda x
d 102	$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$	toda x
d 103	$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
d 104	$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - \dots$	$0 < \lvert x \rvert$ $\lvert x \rvert < \pi$
d 105	$\operatorname{senh}^{-1}x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$	$\lvert x \rvert < 1$
d 106	$\cosh^{-1}x = \ln 2x - \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1}{4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1}{6x^6} + \dots$	$\lvert x \rvert > 1$
d 107	$\tanh^{-1}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots$	$\lvert x \rvert < 1$
d 108	$\coth^{-1}x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots$	$\lvert x \rvert > 1$

Generalidades: Toda función periódica $f(x)$, que puede descomponerse en el intervalo de periodicidad $-\pi \leqq x \leqq \pi$ en un número finito de intervalos continuos, podrá descomponerse en ese intervalo en una serie convergente de la forma ($x = \omega t$):

SERIES DE FOURIER



d 109 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Los coeficientes de cada término se forman como sigue:

d 110 $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad \Big| \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, en uno y otro caso

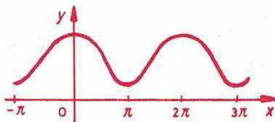
Simplificación del cálculo de los coeficientes:

Funciones pares: $f(x) = f(-x)$

d 111 $$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

d 112 $b_k = 0$

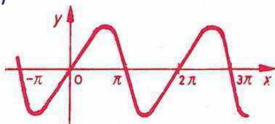


Funciones impares: $f(x) = -f(-x)$

d 113 $a_k = 0$

d 114 $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

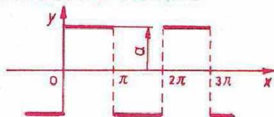


	Función par	Función impar
d 115	Si $f(x) = f(-x)$ y	Si $f(x) = -f(-x)$ y
d 116	$f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$ entonces	$f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$ entonces
d 117	$a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(kx)dx$ para $k = 1, 3, 5, \ldots$	$b_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx$ para $k = 1, 3, 5, \ldots$
d 118	$a_k = 0$ para $k = 0, 2, 4, \ldots$	$a_k = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$
d 119	$b_k = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$	$b_k = 0$ para $k = 2, 4, 6, \ldots$

TABLAS DE DESARROLLO EN SERIES DE FOURIER

d 120 $y = a$ para $0 < x < \pi$

d 121 $y = -a$ para $\pi < x < 2\pi$

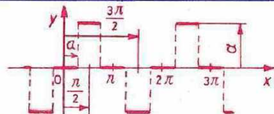




d 122 $$y = \frac{4a}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots\right]$$

d 123 $y = a$ para $\alpha < x < \pi - \alpha$

d 124 $y = -a$ para $\pi + \alpha < x < 2\pi - \alpha$

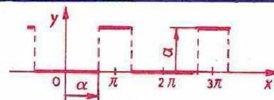




d 125 $$y = \frac{4a}{\pi}\left[\cos\alpha \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\cos(3\alpha)\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5}\cos(5\alpha)\operatorname{sen}(5x) + \dots\right]$$

d 126 $y = a$ para $\alpha < x < 2\pi - \alpha$

d 127 $y = f(2\pi + x)$



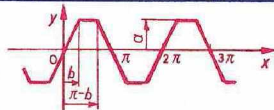


d 128 $$y = \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{1}\cos x + \frac{\operatorname{sen} 2(\pi - \alpha)}{3}\cos(2x) - \frac{\operatorname{sen} 3(\pi - \alpha)}{3}\cos(3x) + \dots\right]$$

d 129 $y = ax/b$ para $0 \leq x \leq b$

d 130 $y = a$ para $b \leq x \leq \pi - b$

d 131 $y = a(\pi - x)/b$ para $\pi - b \leq x \leq \pi$

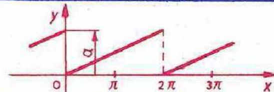




d 132 $$y = \frac{4}{\pi}\frac{a}{b}\left[\frac{1}{1^2}\operatorname{sen} b \operatorname{sen} x + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}(3b)\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}(5b)\operatorname{sen}(5x) + \dots\right]$$

d 133 $y = \dfrac{ax}{2\pi}$ para $0 < x < 2\pi$

d 134 $y = f(2\pi + x)$





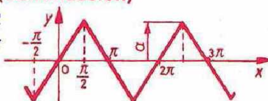
d 135 $$y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \dots\right]$$

SERIES DE FOURIER (Continuación)

d 136 $y = 2ax/\pi$ para $0 \leq x \leq \pi/2$

d 137 $y = 2a(\pi - x)/\pi$ para $\pi/2 \leq x \leq \pi$

d 138 $y = -f(\pi + x)$



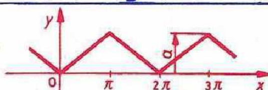


d 139 $$y = \frac{8}{\pi^2} a \left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^2} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5^2} - \ldots \right]$$

d 140 $y = ax/\pi$ para $0 \leq x \leq \pi$

d 141 $y = a(2\pi - x)/\pi$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$

d 142 $y = f(2\pi + x)$



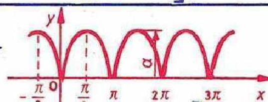


d 143 $$y = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots \right]$$

d 144 $y = a \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq \pi$

d 145 $y = -a \operatorname{sen} x$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$

d 146 $y = f(\pi + x)$



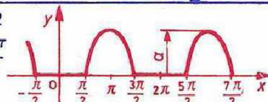


d 147 $$y = \frac{2a}{\pi} - \frac{4a}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \ldots \right]$$

d 148 $y = 0$ para $0 \leq x \leq \pi/2$

d 149 $y = a \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ para $\frac{x}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

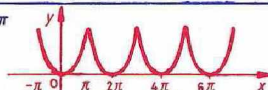
d 150 $y = f(2\pi + x)$



d 151 $$y = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{\cos(2x)}{2^2 - 1} - \frac{\cos(4x)}{4^2 - 1} + \frac{\cos(6x)}{6^2 - 1} - \ldots \right]$$

d 152 $y = x^2$ para $-\pi \leq x \leq \pi$

d 153 $y = f(-x) = f(2\pi + x)$

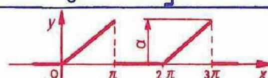




d 154 $$y = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \ldots \right]$$

d 155 $y = ax/\pi$ para $0 \leq x \leq \pi$

d 156 $y = f(2\pi + x)$

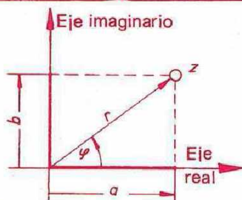




d 157 $$y = \frac{a}{4} - \frac{2a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots \right] + \frac{a}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \ldots \right]$$

Generalidades:

$z = r\,e^{i\phi}$
a = parte real de z
b = parte imaginaria de z
r = módulo (valor absoluto) de z
ϕ = argumento (áng. en rads.) de z
(a y b son reales)



d 158 $$i = \sqrt{-1}$$

d 159	$i^1 = +i$	$i^{-1} = -i$
d 160	$i^2 = -1$	$i^{-2} = -1$
d 161	$i^3 = -i$	$i^{-3} = +i$
d 162	$i^4 = +1$	$i^{-4} = +1$
d 163	$i^5 = +i$	$i^{-5} = -i$

etc.

Nota: Para evitar confusiones, en la electrotecnia se sustituye *i* por *j*.



En coordenadas cartesianas:

d 164 $$z = a + ib$$

d 165 $$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

d 166 $$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

d 167 $$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

d 168 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

d 169 $$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

d 170 $$\sqrt{a \pm ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$, entonces $z_1 = z_2$.

En coordenadas polares:



d 171 $$z = r(\cos\phi + i \cdot \operatorname{sen}\phi) = a + ib$$

d 172 $$r = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

d 173 $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

d 174 $$\operatorname{sen}\phi = \frac{b}{r} \quad\Big|\quad \cos\phi = \frac{a}{r} \quad\Big|\quad \tan\phi = \frac{b}{a}$$



d 175 $$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)]$$

d 176 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\phi_1 - \phi_2)] \quad (z_2 \neq 0)$$



d 177 $$z^n = r^n (\cos n\phi + i \cdot \operatorname{sen} n\phi) \quad (n > 0, \text{ entero})$$

d 178 $$\sqrt[n]{z} = |\sqrt[n]{r}| \left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)$$

d 179 $$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{n} \quad (\text{raíz } n\text{-ésima de la unidad})$$

En las fórmulas d 178 y d 179 se tiene $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

d 180 $$e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \operatorname{sen}\phi$$

d 181 $$e^{-i\phi} = \cos\phi - i \cdot \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\cos\phi + i \cdot \operatorname{sen}\phi}$$

d 182 $$|e^{-i\phi}| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = 1$$

d 183 $$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad\Big|\quad \operatorname{sen}\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

d 184 $$\ln z = \ln r + i(\phi + 2\pi k) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Si $r_1 = r_2$ y $\phi_1 = \phi_2 + 2\pi k$, entonces $z_1 = z_2$

Nota: ϕ es el ángulo en radianes (arco)
k es un número entero cualquiera.

Cálculo del interés compuesto



d 185 $$k_n = k_o \cdot q^n$$

d 186 $$n = \frac{\log \dfrac{k_n}{k_o}}{\log q}$$

Cálculo de rendimientos



d 187 $$k_n = k_o \cdot q^n - r \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

d 188 $$r = \frac{(k_o \cdot q^n - k_n)(q - 1)}{(q^n - 1)\, q}$$

d 189 $$n = \frac{\log \dfrac{r \cdot q - k_n (q - 1)}{r \cdot q - k_o (q - 1)}}{\log q}$$

Si $k_n = 0$ se obtendrán las fórmulas de amortización.

Cálculo de depósitos

Fórmulas para cuentas de ahorro



d 190 $$k_n = k_o \cdot q^n + z \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

d 191 $$z = \frac{(k_n - k_o \cdot q^n)(q - 1)}{q^n - 1}$$

d 192 $$n = \frac{\log \dfrac{k_n (q - 1) + z}{k_o (q - 1) + z}}{\log q}$$

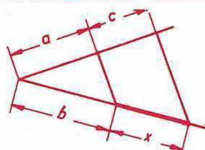
Significado de los símbolos

k_o	Capital inicial	n	Número de años
k_n	Capital a los n años	p	Tipo de interés, en fracción (p. ej., 0.06, o sea, 6%)
r	Anualidad		
z	Depósito	q	$= 1 + p$

d 193 $$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

d 194 $$a : b = c : x$$

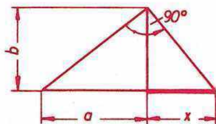
$x =$ cuarta proporcional



d 195 $$x = \frac{b^2}{a}$$

d 196 $$a : b = b : x$$

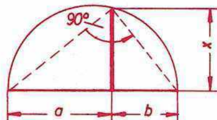
$x =$ tercera proporcional



d 197 $$x = \sqrt{a \cdot b}$$

d 198 $$a : x = x : b$$

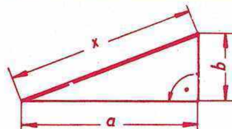
$x =$ media proporcional



d 199 $$x^2 = a^2 + b^2$$

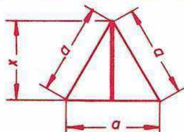
d 200 por tanto, $$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$x =$ hipotenusa de un triángulo rectángulo.



d 201 $$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$x =$ altura de un triángulo equilátero.

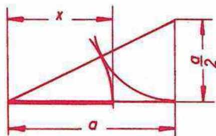


d 202 $$a : x = x : (a - x)$$

d 203 $x =$ porción mayor de un segmento dividido

Según la *sección áurea*:

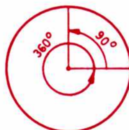
d 204 $$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0.618\, a$$



MEDIDA DE ANGULOS PLANOS

Representación:

La medida de un ángulo puede expresarse en unidades comunes (grados) o en unidades de arco (radianes). Se representa a veces, respectivamente, por α y $\hat{\alpha}$.



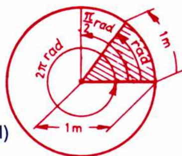
Unidades comunes (sexagesimales): *grado* (°), *minuto* (′), *segundo* (″).

e 1 $1° = 60'; 1' = 60''$

Unidad de arco:

1 *radián* (rad) es el ángulo central de una circunferencia de radio unitario que intercepta un arco también unitario. Por lo tanto,

e 2 $1 \text{ rad} = \dfrac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1$ (número adimensional)



Con frecuencia no se indica específicamente la unidad, como en la siguiente tabla.

e 3

α	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\hat{\alpha}$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	0	0.52	0.78	1.05	1.31	1.57	3.14	4.71	6.28

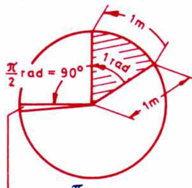
Equivalencias. Por definición:

e 4 $360° = 2\pi$ rad

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad

e 5 $\hat{\alpha} = \dfrac{\pi}{180}\,\alpha = \dfrac{\alpha}{57.2967}$

e 6 $\hat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha = \dfrac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$



$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $= 0.017453$ rad

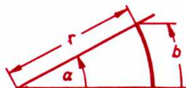
$1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi} = 57.2967°$

Trigonometría

Fundamentos

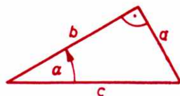
Longitud de un arco

La longitud de un arco (b) es el producto del radio r y el ángulo central $\hat{\alpha}$ (en radianes) de la circunferencia:



e 7 $$b = r\,\hat{\alpha}$$

Funciones trigonométricas. En un triángulo rectánguio:



e 8 $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

e 9 $$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

e 10 $$\tan\alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{a}{b}\,;\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\,;\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,;\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Valores de las funciones de ángulos importantes

α	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	0.500	0.707	0.866	0.966	1	0	−1	0
cos α	1	0.866	0.707	0.500	0.259	0	−1	0	1
tan α	0	0.577	1.000	1.732	3.732	∞	0	∞	0
cot α	∞	1.732	1.000	0.577	0.268	0	∞	0	∞

Relaciones entre las funciones seno y coseno

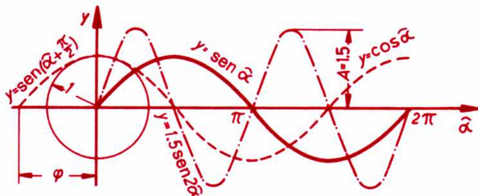


Ecuaciones fundamentales:

e 11 Función seno $y = A\,\operatorname{sen}(k\alpha - \phi)$

e 12 Función coseno $y = A\cos(k\alpha - \phi)$

e 13



——— Seno de amplitud $A = 1$ y $k = 1$

—·— Seno de amplitud $A = 1.5$ y $k = 2$

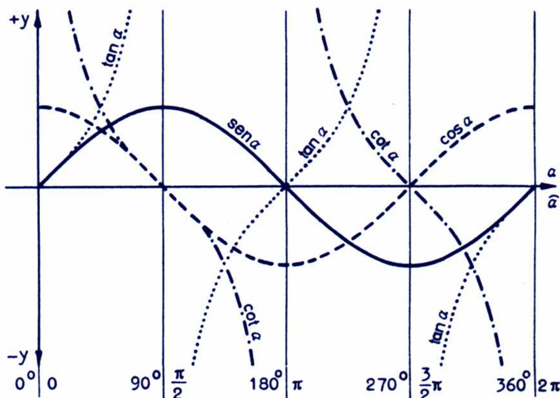
– – – Coseno de amplitud $A = 1$ y $k = 1$

e 14 o bien, seno con defasamiento $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

Trigonometría

Variaciones en los cuadrantes

e 15	$\text{sen}\,(90° - \alpha) = +\cos\alpha$	$\text{sen}\,(90° + \alpha) = +\cos\alpha$
e 16	$\cos\,(\quad " \quad) = +\text{sen}\,\alpha$	$\cos\,(\quad " \quad) = -\text{sen}\,\alpha$
e 17	$\tan\,(\quad " \quad) = +\cot\alpha$	$\tan\,(\quad " \quad) = -\cot\alpha$
e 18	$\cot\,(\quad " \quad) = +\tan\alpha$	$\cot\,(\quad " \quad) = -\tan\alpha$
e 19	$\text{sen}\,(180° - \alpha) = +\text{sen}\,\alpha$	$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
e 20	$\cos\,(\quad " \quad) = -\cos\alpha$	$\cos\,(\quad " \quad) = -\cos\alpha$
e 21	$\tan\,(\quad " \quad) = -\tan\alpha$	$\tan\,(\quad " \quad) = +\tan\alpha$
e 22	$\cot\,(\quad " \quad) = -\cot\alpha$	$\cot\,(\quad " \quad) = +\cot\alpha$
e 23	$\text{sen}\,(270° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\text{sen}\,(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
e 24	$\cos\,(\quad " \quad) = -\text{sen}\,\alpha$	$\cos\,(\quad " \quad) = +\text{sen}\,\alpha$
e 25	$\tan\,(\quad " \quad) = +\cot\alpha$	$\tan\,(\quad " \quad) = -\cot\alpha$
e 26	$\cot\,(\quad " \quad) = +\tan\alpha$	$\cot\,(\quad " \quad) = -\tan\alpha$
e 27	$\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$	$\text{sen}\,(360° + \alpha) = +\text{sen}\,\alpha$
e 28	$\cos\,(\quad " \quad) = +\cos\alpha$	$\cos\,(\quad " \quad) = +\cos\alpha$
e 29	$\tan\,(\quad " \quad) = -\tan\alpha$	$\tan\,(\quad " \quad) = +\tan\alpha$
e 30	$\cot\,(\quad " \quad) = -\cot\alpha$	$\cot\,(\quad " \quad) = +\cot\alpha$
e 31	$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$	$\text{sen}\,(\alpha \pm n \cdot 360°) = +\text{sen}\,\alpha$
e 32	$\cos\,(\quad " \quad) = +\cos\alpha$	$\cos\,(\quad " \quad) = +\cos\alpha$
e 33	$\tan\,(\quad " \quad) = -\tan\alpha$	$\tan\,(\alpha \pm n \cdot 180°) = +\tan\alpha$
e 34	$\cot\,(\quad " \quad) = -\cot\alpha$	$\cot\,(\quad " \quad) = +\cot\alpha$



Trigonometría

Transformaciones trigonométricas

E 4

RELACIONES FUNDAMENTALES

e 35 $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ | $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

e 36 $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ | $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

Funciones de sumas y diferencias de ángulos

e 37 $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

e 38 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

e 39 $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

e 40 $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Operaciones con funciones trigonométricas

e 41 $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

e 42 $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

e 43 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

e 44 $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

e 45 $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

e 46 $\cot\alpha \pm \cot\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$

e 47 $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

e 48 $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

e 49 $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

e 50 $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = -\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}$

e 51 $\cot\alpha \cdot \cot\beta = \dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = -\dfrac{\cot\alpha - \cot\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$

e 52 $\cot\alpha \cdot \tan\beta = \dfrac{\cot\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha + \cot\beta} = -\dfrac{\cot\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha - \cot\beta}$

Trigonometría

Transformaciones trigonométricas

E 5

RELACIONES ENTRE FUNCIONES DE ANGULO SIMPLE, ANGULO DOBLE Y ANGULO MITAD

	$\operatorname{sen}\alpha =$	$\cos\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\cot\alpha =$
e 53	$\cos(90° - \alpha)$	$\operatorname{sen}(90° - \alpha)$	$\cot(90° - \alpha)$	$\tan(90° - \alpha)$
e 54	$\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
e 55	$2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$	$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
e 56	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$
e 57	$\sqrt{\cos^2\alpha - \cos 2\alpha}$	$1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$	$\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1}$
e 58	$\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$	$\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$	$\frac{\sqrt{1 + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$
e 59	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$		
e 60	$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$

	$\operatorname{sen}2\alpha =$	$\cos 2\alpha =$	$\tan 2\alpha =$	$\cot 2\alpha =$
e 61	$2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$	$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$	$\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	$\frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$
e 62		$2\cos^2\alpha - 1$	$\frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$	$\frac{1}{2}\cot\alpha - \frac{1}{2}\tan\alpha$
e 63		$1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$		

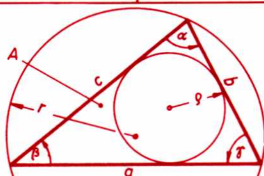
	$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} =$	$\cos\frac{\alpha}{2} =$	$\tan\frac{\alpha}{2} =$	$\cot\frac{\alpha}{2} =$
e 64			$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha}$
e 65	$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$	$\frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\frac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
e 66			$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$	$\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$

Trigonometría

Teoremas o leyes principales

E 6

TRIANGULO (OBLICUANGULO)



Teorema de los senos

e 67 $\operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma = a : b : c$

e 68 $a = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\alpha$

e 69 $b = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta$

e 70 $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\gamma$

Teorema de los cosenos

e 71 $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$

e 72 $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ac\cos\beta$

e 73 $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$

(El coseno es negativo en el caso de ángulos obtusos)

Teorema de las tangentes

e 74 $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$ | $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$ | $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$

Relaciones para el ángulo mitad

e 75 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\rho}{s-a}$ | $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\rho}{s-b}$ | $\tan\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\rho}{s-c}$

Area, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, y semiperímetro

e 76 $A = \dfrac{1}{2}\,bc\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}\,ac\operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}\,ab\operatorname{sen}\gamma$

e 77 $A = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \rho\,s$

e 78 $\rho = \sqrt{\dfrac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$

e 79 $r = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

e 80 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Trigonometría

Funciones inversas

Notaciones: $\operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{áng\,sen} x$

Definición:

	Función $y =$			
	$\operatorname{sen}^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$\tan^{-1} x$	$\cot^{-1} x$
Equivalente a	$x = \operatorname{sen} y$	$x = \cos y$	$x = \tan y$	$x = \cot y$
Intervalo de definición	$-1 \leqq x \leqq +1$	$-1 \leqq x \leqq +1$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Valor principal en el intervalo	$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$	$\pi \geqq y \geqq 0$	$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$	$\pi > y > 0$

Relaciones fundamentales

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$$

Relaciones entre funciones inversas

• Para x positiva (≥ 0)

$\operatorname{sen}^{-1} x =$	$\cos^{-1} x =$	$\tan^{-1} x =$	$\cot^{-1} x =$
• $\cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$	• $\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{1 - x^2}$	$\operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	• $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	• $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	• $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	• $\cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
• $\cot^{-1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$\cot^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	• $\cot^{-1} \frac{1}{x}$	$\tan^{-1} \frac{1}{x}$

Para x negativa (< 0) se tiene

$$\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x \qquad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \qquad \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$$

Teorema de adición

$$\operatorname{sen}^{-1} a \pm \operatorname{sen}^{-1} b = \operatorname{sen}^{-1} \left(a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}\right)$$

$$\cos^{-1} a \pm \cos^{-1} b = \cos^{-1} \left(a\,b \mp \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - b^2}\right)$$

$$\tan^{-1} a \pm \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a \pm b}{1 \mp ab}$$

$$\cot^{-1} a \pm \cot^{-1} b = \cot^{-1} \frac{ab \mp 1}{b \pm a}$$

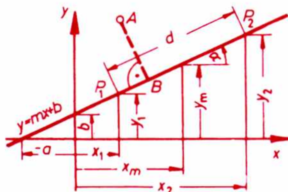
Geometría analítica — F 1

Recta y triángulo

RECTA



f 1 Ecuación $y = mx + b$



f 2 Pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$

Forma simétrica para $a \neq 0$ y $b \neq 0$

f 3 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

Pendiente de la perpendicular AB

f 4 $$m_{AB} = \frac{-1}{m}$$

Forma en función de dos puntos: $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$

f 5 $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En función del punto $P_1\ (x_1, y_1)$ y la pendiente m

f 6 $$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

f 7 Distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Punto medio entre dos puntos

f 8 $$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Bigg| \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

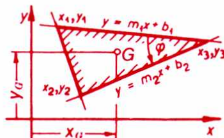
Punto de intersección de dos rectas (ver la figura del triángulo)

f 9 $$x_3 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad \Bigg| \quad y_3 = m_1\, x_3 + b_1 = m_2\, x_3 + b_2$$

f 10 Angulo entre dos rectas (ϕ): $\tan \phi = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$ (ver la figura del triángulo)

TRIANGULO





Centroide (punto G)

f 11 $$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

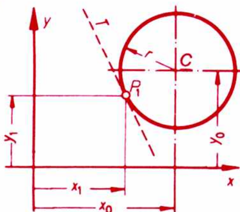
f 12 $$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

f 13 Area $$A = \frac{(x_1\, y_2 - x_2\, y_1) + (x_2\, y_3 - x_3\, y_2) + (x_3\, y_1 - x_1\, y_3)}{2}$$

CIRCUNFERENCIA

Ecuaciones de la circunferencia

	Centro	
	en el origen	en otra posición
f 14	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Ecuación fundamental

f 15 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Radio

f 16 $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C}$

Coordenadas del centro *C*

f 17 $x_0 = -\dfrac{A}{2}$ | $y_0 = -\dfrac{B}{2}$

Tangente *T* en el punto P_1 (x_1, y_1)

f 18 $y = \dfrac{r^2 - (x - x_0)(x_1 - x_0)}{y_1 - y_0} + y_0$

PARABOLA

Ecuaciones de la parábola (en esta forma pueden apreciarse directamente la posición del vértice y el parámetro *p*)

	Vértice		apertura hacia
	en el origen	en otra posición	
f 19	$x^2 = 2py$	$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	arriba
f 20	$x^2 = -2py$	$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$	abajo

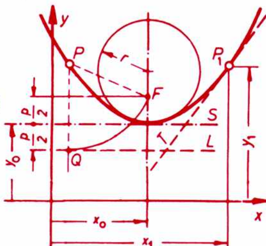
F: foco
L: directriz
S: tangente en el vértice

Ecuación fundamental

f 21 $y = Ax^2 + Bx + C$

f 22 Radio de curvatura $r = p$ (parámetro)

f 23 Propiedad básica $\overline{PF} = \overline{PQ}$



Tangente *T* en P_1 (x_1, y_1)

f 24 $y = \dfrac{2(y_1 - y_0)(x - x_1)}{x_1 - x_0} + y_1$

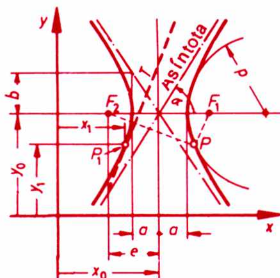
HIPERBOLA

Ecuaciones de la hipérbola

Punto de intersección de las asíntotas	
en el origen	en otra posición
f 25 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0$

Ecuación fundamental

f 26 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$



Propiedad básica

f 27 $\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$

Distancia focal

f 28 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pendiente de las asíntotas

f 29 $\tan\alpha = m = \pm \frac{b}{a}$

Radio en el vértice $p = \frac{b^2}{a}$ (parámetro)

f 30 Tangente T en $P_1\,(x_1, y_1)$ $\quad y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x_1 - x_0)\,(x - x_1)}{y_1 - y_0} + y_1$

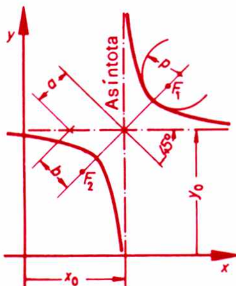
HIPERBOLA EQUILATERA

En las hipérbolas equiláteras $a = b$, por lo tanto:

Pendiente de las asíntotas

f 31 $\tan\alpha = m = \pm 1 \quad (\alpha = 45°)$

Ecuaciones (cuando las asíntotas son paralelas a los ejes x y y):



Punto de intersección de las asíntotas	
en el origen	en otra posición
f 32 $x \cdot y = c^2$	$(x - x_0)\,(y - y_0) = c^2$

Radio de curvatura

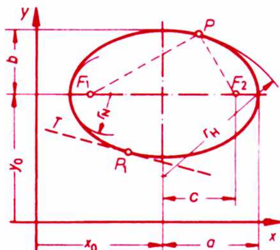
f 33 $p = a$ (parámetro)

ELIPSE

Ecuaciones de la elipse

Punto de intersección de los ejes

	en el origen	en otra posición
f 34	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-1=0$



Radios de curvatura

f 35 $r_N=\frac{b^2}{a}$ | $r_H=\frac{a^2}{b}$

Distancia focal

f 36 $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Propiedad básica

f 37 $\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=2a$

Tangente T en $P_1\ (x_1, y_1)$

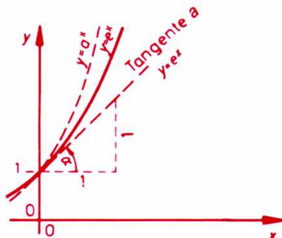
f 38 $$y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_1-x_0)\,(x-x_1)}{y_1-y_0}+y_1$$

CURVA EXPONENCIAL

Ecuación fundamental

f 39 $y=a^x$

a es una constante positiva $\neq 1$



Nota:

Todas las curvas exponenciales pasan por el punto de coordenadas $x=0$, $y=1$.

La curva que en este punto tiene la inclinación de 45° ($\tan\alpha = 1$), da por derivación la misma curva. La constante a se convierte en este caso en e (número de Euler), base de los logaritmos naturales:

$$e=2.718\ 281\ 828\ 459\ldots$$

Funciones hiperbólicas
Directas

G 1

Otras notaciones: Sh, Ch, Th, Cth

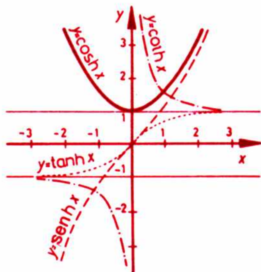
Definiciones

g 1 $$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \; ^{*}$$

g 2 $$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

g 3 $$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

g 4 $$\coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$



Relaciones fundamentales

g 5 $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

g 6 $$\tanh x \cdot \coth x = 1$$

g 7 $$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \quad \Big| \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad \Big| \quad 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\operatorname{senh}^2 x}$$

Relaciones entre las diversas funciones

Para x positiva:

	$\operatorname{senh} x =$	$\cosh x =$	$\tanh x =$	$\coth x =$
g 8	$\pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$ **	$\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}$	$\frac{\operatorname{senh} x}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}}{\operatorname{senh} x}$
g 9	$\frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$ **	$\pm\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$ **
g 10	$\pm\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$ **	$\frac{\lvert \coth x \rvert}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\coth x}$	$\frac{1}{\tanh x}$

Para x negativa:

g 11 $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ | $\cosh(-x) = +\cosh x$

g 12 $\tanh(-x) = -\tanh x$ | $\coth(-x) = -\coth x$

Teoremas de adición

g 13 $$\operatorname{senh}(a \pm b) = \operatorname{senh} a \cosh b \pm \cosh a \operatorname{senh} b$$

g 14 $$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$$

g 15 $$\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b}$$

g 16 $$\coth(a \pm b) = \frac{\coth a \coth b \pm 1}{\coth a \pm \coth b}$$

*El exponente x debe ser numérico.

**El signo + para $x > 0$; − para $x < 0$.

Funciones hiperbólicas

Inversas

Otras notaciones: Arg Sh, Arg Ch, Arg Th, Arg Cth

Definiciones

		Función: $y =$ $\operatorname{senh}^{-1}x$	$\cosh^{-1}x$	$\tanh^{-1}x$	$\coth^{-1}x$
g 17	Equivalente a	$x = \operatorname{senh} y$	$x = \cosh y$	$x = \tanh y$	$x = \coth y$
g 18	Relaciones con ln	$= \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$= \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$
g 19	Dominio	$-\infty < x < +\infty$	$1 \leqq x < +\infty$	$\lvert x\rvert < 1$	$\lvert x\rvert > 1$
g 20	Contradominio	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$	$\lvert y\rvert > 0$

Relaciones entre las diversas funciones

Para x positiva:

	$\operatorname{senh}^{-1}x =$	$\cosh^{-1}x =$	$\tanh^{-1}x =$	$\coth^{-1}x =$
g 21	$\pm\cosh^{-1}\sqrt{1+x^2}$ *	$\pm\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x^2-1}$ *	$\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
g 22	$\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\tanh^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ *	$\pm\cosh^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$\pm\cosh^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *
g 23	$\coth^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\pm\coth^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *	$\coth^{-1}\frac{1}{x}$	$\tanh^{-1}\frac{1}{x}$

Para x negativa:

g 24 $\operatorname{senh}^{-1}(-x) = -\operatorname{senh}^{-1}x$

g 25 $\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1}x$ | $\coth^{-1}(-x) = -\coth^{-1}x$

Teoremas de adición

g 26 $\operatorname{senh}^{-1}a \pm \operatorname{senh}^{-1}b = \operatorname{senh}^{-1}(a\sqrt{b^2+1} \pm b\sqrt{a^2+1})$

g 27 $\cosh^{-1}a \pm \cosh^{-1}b = \cosh^{-1}[ab \pm \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]$

g 28 $\tanh^{-1}a \pm \tanh^{-1}b = \tanh^{-1}\frac{a \pm b}{1 \pm ab}$

g 29 $\coth^{-1}a \pm \coth^{-1}b = \coth^{-1}\frac{ab \pm 1}{a \pm b}$

*Ver nota en G1

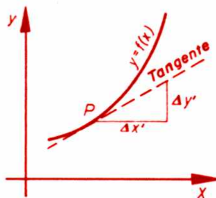
Cálculo diferencial — H 1

Relación de cambio: Derivada

PENDIENTE EN UN PUNTO. RELACION (O INTENSIDAD) DE CAMBIO

Pendiente de una curva

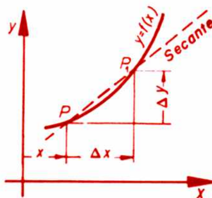
En una curva $y = f(x)$, la pendiente m varía en cada punto. La pendiente de la curva en un punto P es también la pendiente de su tangente en dicho punto:



h 1 $$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

Relación media de cambio (cociente incremental)

La intensidad media de variación de la función $y = f(x)$ es la relación de los incrementos $\Delta y/\Delta x$ correspondientes al segmento de curva PP_1:



h 2 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada (cociente diferencial)

Cuando Δx tiende a cero, el punto P_1 tiende al punto P, y la secante PP_1, a la tangente a la curva en P. De manera que la relación de incrementos se convierte en la relación de diferenciales, que es la *derivada* (o intensidad de cambio) de la función en P:

h 3 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

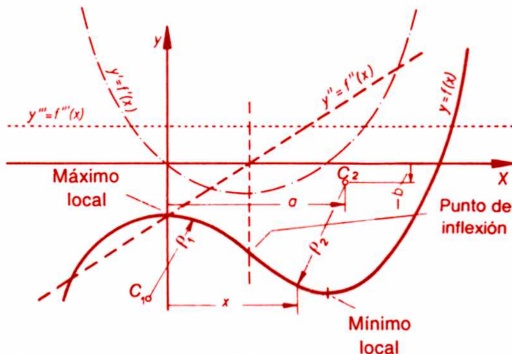
Notaciones: $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, $\quad y'' = \frac{dy'}{dx} = f''(x)$, etc.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Curvas de derivadas sucesivas

Si para cada x de una curva se lleva la pendiente (o derivada) correspondiente y' como ordenada, se obtendrá la curva de $y' = f'(x)$, o de la primera derivada de la curva dada $y = f(x)$. Si se deriva la curva $y' = f'(x)$ se obtendrá $y'' = f''(x)$, o la segunda derivada de la curva dada $y = f(x)$, etc.

Ejemplo: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$



Radio de curvatura ρ en un punto dado x

h 4 $$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$$

Coordenadas del centro de curvatura C correspondiente a un radio ρ

h 5 $$a = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

h 6 $$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

DETERMINACION DE LOS VALORES MAXIMOS, MINIMOS Y PUNTOS DE INFLEXION

Valores máximos y mínimos

Hágase $y' = 0$, y sea a el valor obtenido de x. Sustitúyase ahora $x = a$ en y''.

h 7 Si $y''(a) > 0$ habrá un *mínimo* en $x = a$.

h 8 Si $y''(a) < 0$ habrá un *máximo* en $x = a$.

h 9 Cuando $y''(a) = 0$, véase h 19.

Punto de inflexión

Hágase $y'' = 0$, y sea a el valor obtenido de x. Sustitúyase ahora $x = a$ en y'''.

h 10 Si $y'''(a) \neq 0$, habrá un *punto de inflexión* en $x = a$.

Forma de la curva $y = f(x)$

Crecimiento y decrecimiento

h 11 $y'(x) > 0$ — $y(x)$ *crece* si aumenta x

h 12 $y'(x) < 0$ — $y(x)$ *decrece* si aumenta x

h 13 $y'(x) = 0$ — $y(x)$ tiene en x una tangente paralela al eje x.

Curvatura

h 14 $y''(x) < 0$ — $y(x)$ será cóncava hacia abajo

h 15 $y''(x) > 0$ — $y(x)$ será cóncava hacia arriba

h 16 $y''(x) = 0$ — con / sin cambio de signo, $y(x)$ tendrá en x punto de inflexión (con) / máximo o mínimo (sin)

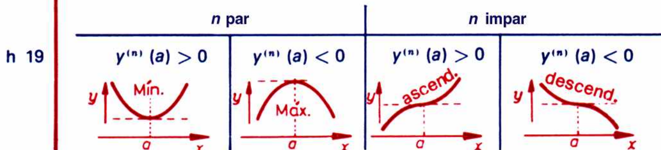
Otros casos

Si para $x = a$

h 17 $y'(a) = y''(a) = y'''(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0$, pero

h 18 $y^{n}(a) \neq 0$, pueden presentarse los 4 casos siguientes:

	n par		*n* impar	
h 19	$y^{(n)}(a) > 0$	$y^{(n)}(a) < 0$	$y^{(n)}(a) > 0$	$y^{(n)}(a) < 0$



DERIVADAS DE FUNCIONES

Reglas fundamentales

	Función	Derivada
h 20	$y = c\,x^n + C$	$y' = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
h 21	$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$
h 22	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
h 23	$y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
h 24	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
h 25	$y = u(x)^{v(x)}$	$y' = u^v\left(\dfrac{u' \cdot v}{u} + v' \cdot \ln u\right)$

Derivada de una función de función

h 26 $y = f[u(x)]$

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivadas de funciones paramétricas

h 27 $y = f(x)$ $\quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

h 28

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Derivadas de funciones inversas

Si de la ecuación $y = f(x)$ se despeja x, resulta la función inversa $x = \phi(y)$.

h 29 $x = \phi(y)$

$$f'(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$$

Ejemplo:

h 30 $y = f(x) = \cos^{-1} x \;\therefore$

h 31 $x = \phi(y) = \cos y$

$$f'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES

Funciones exponenciales

	Función	Derivada
h 32	$y = e^x$	$y' = e^x = y'' = \dots$
h 33	$y = e^{-x}$	$y' = -e^{-x}$
h 34	$y = e^{ax}$	$y' = a \cdot e^{ax}$
h 35	$y = x \cdot e^x$	$y' = e^x \cdot (1 + x)$
h 36	$y = \sqrt{e^x}$	$y' = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$
h 37	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
h 38	$y = a^{nx}$	$y' = n \cdot a^{nx} \cdot \ln a$
h 39	$y = a^{x^2}$	$y' = a^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln a$

Funciones trigonométricas

	Función	Derivada
h 40	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
h 41	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
h 42	$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
h 43	$y = \cot x$	$y' = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
h 44	$y = a \cdot \operatorname{sen} kx$	$y' = a \cdot k \cdot \cos kx$
h 45	$y = a \cdot \cos kx$	$y' = -a \cdot k \cdot \operatorname{sen} kx$
h 46	$y = \operatorname{sen}^n x$	$y' = n (\operatorname{sen}^{n-1} x) (\cos x)$
h 47	$y = \cos^n x$	$y' = -n (\cos^{n-1} x) (\operatorname{sen} x)$
h 48	$y = \tan^n x$	$y' = n (\tan^{n-1} x) (1 + \tan^2 x)$
h 49	$y = \cot^n x$	$y' = -n (\cot^{n-1} x) (1 + \cot^2 x)$
h 50	$y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$y' = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$
h 51	$y = \dfrac{1}{\cos x}$	$y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

DERIVADAS DE FUNCIONES

Funciones logarítmicas

	Función	Derivada
h 52	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
h 53	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
h 54	$y = \ln(1 \pm x)$	$y' = \frac{\pm 1}{1 \pm x}$
h 55	$y = \ln x^n$	$y' = \frac{n}{x}$
h 56	$y = \ln \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2x}$

Funciones hiperbólicas

h 57	$y = \operatorname{senh} x$	$y' = \cosh x$
h 58	$y = \cosh x$	$y' = \operatorname{senh} x$
h 59	$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
h 60	$y = \coth x$	$y' = \frac{-1}{\operatorname{senh}^2 x}$

Funciones inversas (trigonométricas e hiperbólicas)

h 61	$y = \operatorname{sen}^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
h 62	$y = \cos^{-1} x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
h 63	$y = \tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
h 64	$y = \cot^{-1} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$
h 65	$y = \operatorname{senh}^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
h 66	$y = \cosh^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
h 67	$y = \tanh^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$
h 68	$y = \coth^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$

Cálculo integral

SIGNIFICADO DE LA INTEGRACION

La integral, función inversa de la derivada

Por integración se entiende el encontrar una función $F(x)$ a partir de una función dada $y = f(x)$ de manera que la derivada $F'(x)$ sea igual a la función original $f(x)$. Por lo tanto,

i 1 $$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

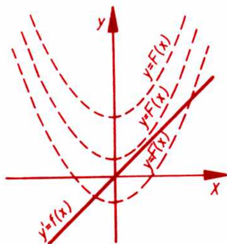
La integral indefinida

i 2 $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

C es una constante indeterminada que desaparece al derivar, ya que la derivada de una constante es igual a cero.

Significado geométrico de la integral indefinida

Como muestra la figura, hay una infinidad de curvas $y = F(x)$ con pendiente o derivada $y' = F(x)$. Todas las curvas $y = f(x)$ son iguales pero desplazadas paralelamente y en la dirección del eje y. La constante C fija una curva determinada. Si la curva debe pasar por el punto x_o, y_o se tendrá:



i 3 $$C = y_o - F(x_o)$$

La integral definida

La integral definida tiene la forma:

i 4 $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la integral resultante se sustituye primero el límite superior y luego el inferior, y se resta el segundo resultado del primero. Desaparece así la constante C.

Reglas fundamentales

i 5 $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ donde } n \neq -1$$

i 6 $$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

i 7 $$\int [u(x) \pm v(x)] \, dx = \int u(x) \, dx \pm \int v(x) \, dx$$

i 8 $$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln u(x) + C$$

i 9 $$\int u(x) \cdot u'(x) \, dx = \frac{1}{2} [u(x)]^2 + C$$

Integración por partes

i 10 $$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Método de sustitución

i 11 $$\int f(x) \, dx = \int f[\phi(z)] \cdot \phi'(z) \, dz$$

donde $x = \phi(z)$ y $dx = \phi'(z) \, dz$

Ejemplo:

i 12 $$F(x) = \int \sqrt{3x - 5} \, dx$$

Haga $3x - 5 = z$; la derivada es $z' = \frac{dz}{dx} = 3$.

Por tanto, $dx = \frac{dz}{3}$. Expresando la integral en función de z queda,

$F(x) = \frac{1}{3} \int \sqrt{z} \, dz = \frac{2}{9} z \sqrt{z} + C$. En la última expresión se

sustituye el valor de z: $F(x) = \frac{2}{9} (3x - 5) \sqrt{3x - 5} + C$

Cálculo integral

Fórmulas básicas

INTEGRALES

(No se indica la constante de integración C)

i 13 $\int e^x\,dx = e^x$ ‖ $\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - x$

i 14 $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$ ‖ $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln(x-a)$

i 15 $\int \dfrac{dx}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{a-b}\ln\dfrac{x-a}{x-b}$ $(a \neq b)$

i 16 $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n} = -\dfrac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$

i 17 $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = -\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}$ $(x > a)$

i 18 $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x}$ $(x < a)$

i 19 $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ ‖ $\int \dfrac{x\,dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$

i 20 $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \dfrac{1}{2a^3}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$

i 21 $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

i 22 $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$ ‖ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ $(n \neq 1)$

i 23 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a}$ ‖ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}$

i 24 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\dfrac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

i 25 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\dfrac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

i 26 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a}$

i 27 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a}$

i 28 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{senh}^{-1}\dfrac{x}{a}$

INTEGRALES

(No se indica la constante de integración C)

i 29 $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

i 30 $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$

i 31 $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x$

i 32 $\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$

i 33 $\int \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

---

i 34 $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

i 35 $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$

i 36 $\int \cos^3 x \, dx = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 3x$

i 37 $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

i 38 $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$

---

i 39 $\int \tan x \, dx = -\ln \cos x \quad \Big\| \quad \int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$

i 40 $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$

i 41 $\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

---

i 42 $\int \cot x \, dx = \ln \operatorname{sen} x \quad \Big\| \quad \int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sen} ax$

i 43 $\int \cot^2 x \, dx = -x - \cot x$

i 44 $\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

---

i 45 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \tan \frac{x}{2} \quad \Big\| \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x$

i 46 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} \qquad (n \neq 1)$

i 47 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \Big\| \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

i 48 $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} \qquad (n \neq 1)$

INTEGRALES

(No se indica la constante de integración C)

i 49 $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ‖ $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = -\cot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

i 50 $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$ ‖ $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\cot \frac{x}{2}$

i 51 $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \, dx = -\frac{\operatorname{sen}(ax + bx)}{2(a + b)} + \frac{\operatorname{sen}(ax - bx)}{2(a - b)} \quad (|a| \neq |b|)$

i 52 $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(ax + bx)}{2(a + b)} - \frac{\cos(ax - bx)}{2(a - b)} \quad (|a| \neq |b|)$

i 53 $\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\operatorname{sen}(ax + bx)}{2(a + b)} + \frac{\operatorname{sen}(ax - bx)}{2(a - b)} \quad (|a| \neq |b|)$

i 54 $\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$

i 55 $\int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sen} ax \, dx$

i 56 $\int \operatorname{sen}^{-1} x \, dx = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

i 57 $\int \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2}$

i 58 $\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

i 59 $\int \cot^{-1} x \, dx = x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

i 60 $\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$

i 61 $\int \operatorname{senh}^2 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \frac{x}{2}$

i 62 $\int \operatorname{senh}^n x \, dx = \frac{1}{n} \cosh x \operatorname{senh}^{n-1} x - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{senh}^{n-2} x \, dx$

i 63 $\int \operatorname{senh} ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax$

i 64 $\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$

i 65 $\int \cosh^2 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2}$

i 66 $\int \cosh^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{senh} x \cosh^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} x \, dx$

i 67 $\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{senh} ax$

INTEGRALES

(No se indica la constante de integración C)

i 68 $\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x$

i 69 $\int \tanh^2 x \, dx = x - \tanh x$

i 70 $\int \tanh^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \tanh^{n-1} x + \int \tanh^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

i 71 $\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax$

---

i 72 $\int \coth x \, dx = \ln \operatorname{senh} x$

i 73 $\int \coth^2 x \, dx = x - \coth x$

i 74 $\int \coth^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \coth^{n-1} x + \int \coth^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

i 75 $\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{senh} ax$

---

i 76 $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x} = \ln \tanh \frac{x}{2}$

i 77 $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x$

i 78 $\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \tan^{-1} e^x$

i 79 $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$

---

i 80 $\int \operatorname{senh}^{-1} x \, dx = x \operatorname{senh}^{-1} x - \sqrt{x^2 + 1}$

i 81 $\int \cosh^{-1} x \, dx = x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}$

i 82 $\int \tanh^{-1} x \, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2)$

i 83 $\int \coth^{-1} x \, dx = x \coth^{-1} x + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1)$

---

i 84 $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{m+n} \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x +$

$$\frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

Si n es impar, para la integral del residuo se cumple que:

i 85 $\int \operatorname{sen}^m x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$

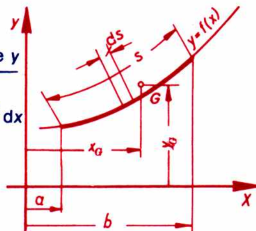
MOMENTOS ESTATICOS

Diferencial de arco $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

	Longitud de arco	Area de la superficie generada por el giro de una curva alrededor del eje x
i 86	$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$	$A_R = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

Momento estático de una curva

	con respecto al eje x	con respecto al eje y
i 87	$M_x = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$	$M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$



Coordenadas del centroide G

i 88	$x_G = \frac{M_y}{s}$	$y_G = \frac{M_x}{s}$

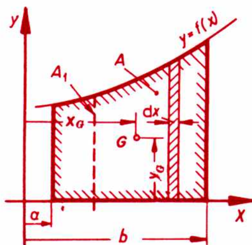
	Area de una superficie	Volumen de un sólido generado por el giro de la superficie A alrededor del eje x	Volumen de un sólido cuya sección transversal A_1 es función de x
i 89	$A = \int_a^b y\, dx$	$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$	$V = \int_a^b A_1(x)\, dx$

Momento estático de una superficie con respecto al

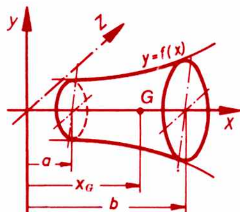
	eje x	eje y
i 90	$Q_x = \int_a^b \frac{y^2}{2}\, dx$	$Q_y = \int_a^b xy\, dx$

Coordenadas del centroide

i 91	$x_G = \frac{Q_y}{A}$	$x_G = \frac{Q_x}{A}$



Momento estático del volumen de un cuerpo (con relación al plano yz)



i 92 $$M_{yz} = \pi \int_a^b x\, y^2\, dx$$

Coordenada del centroide

i 93 $$x_G = \frac{M_{yz}}{V}$$

Regla de Guldinus (o Pappus)

Area de la superficie de un sólido de revolución

$A_R =$ Longitud de arco s multiplicada por el recorrido del centroide.

i 94 $= 2\pi s\, y_G$ (fórmulas i 86 e i 88)

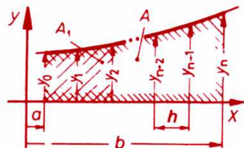
Volumen de un sólido de revolución

$V_R =$ Area A multiplicada por el recorrido del centroide

i 95 $= 2\pi A y_G$ (fórmulas i 89 e i 91)

Integración numérica

Se divide la superficie en un número par n de franjas de igual ancho



i 96 $$h = \frac{b-a}{n}$$

El área se calcula entonces con la

i 97 Fórmula trapecial $A = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$

Regla de Simpson

Para curvas hasta de 3er. grado

i 98 $$A_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

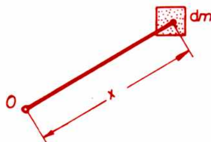
para curvas de grado mayor que el 3°

i 99 $$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})\right]$$

MOMENTOS DE INERCIA

Definición general

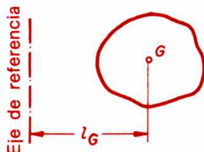
Momento de inercia con respecto a un eje X o un punto O, es la suma de los productos de elementos de longitud, área, volumen o masa, por el cuadrado de su distancia al eje o punto:



i 100 $$J = \int x^2 \, dm$$

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos (ver M 2)

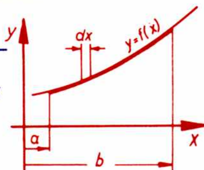
Para cualquier momento de inercia (de longitud, área, volumen o masa), axial o polar, se verifica que:



i 101 $$J = J_G + m l_G$$

Momentos de inercia de una curva plana con respecto al

eje x	eje y
i 102 $I_{Lx} = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2} \, dx$	$I_{Ly} = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2} \, dx$



J Momento de inercia con respecto al eje de referencia

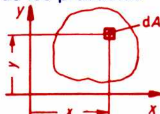
J_G Momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centroide G

m Magnitud considerada (longitud, área, volumen o masa)

l_G Distancia del centroide al eje o punto de referencia.

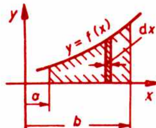
MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA DE SUPERFICIES PLANAS

El *momento de inercia axial* de una superficie plana respecto a un eje x o y, situado en su plano, es igual a la suma de los productos de los elementos de área dA y el cuadrado de las distancias a los ejes respectivos, y o x, respectivamente.



i 103 $$I_x = \int y^2 \, dA \; ; \qquad I_y = \int x^2 \, dA$$

Si se da la función $y = f(x)$, entonces:



Con respecto al eje x	Con respecto al eje y
$I_x = \int_a^b \frac{y^3}{3} dx$	$I_y = \int_a^b x^2 y \, dx$

(i 104)

El *momento de inercia polar* de una superficie plana respecto a un punto O situado en su plano es igual a la suma de los productos de los elementos de área dA y el cuadrado de su distancia r a dicho punto (*polo*):

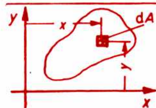


i 105 $$I_0 = \int r^2 \, dA$$

Si los ejes de referencia de los momentos de inercia I_x e I_y son perpendiculares y se cortan en O, existe entre el momento polar y los axiales la relación:

i 106 $$I_0 = \int r^2 \, dA = \int (y^2 + x^2) \, dA = I_x + I_y$$

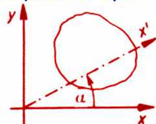
El *producto de inercia* de una superficie plana respecto a los ejes situados en su plano es igual a la suma de los productos de los elementos de área dA y las distancias x y y a ambos ejes:



i 107 $$I_{xy} = \int x \, y \, dA \geqq 0, \text{ o bien} \leqq 0$$

Si uno de los ejes de referencia coincide con un eje de simetría de la superficie, entonces $I_{xy} = 0$.

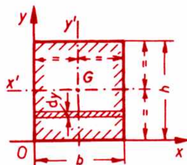
Transformación a un eje inclinado x': Si se conocen para los ejes perpendiculares x y y las cantidades I_x, I_y e I_{xy}, entonces el momento de inercia axial $I_{x'}$ con respecto a un eje inclinado un ángulo α con respecto al eje x, es igual a:



i 108 $$I_{x'} = I_x \cos^2\alpha + I_y \operatorname{sen}^2\alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

EJEMPLOS DE CALCULO DE MOMENTOS DE INERCIA DE SUPERFICIES PLANAS

Rectángulo



i 109 $$I_x = \int_0^h y^2 b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

i 110 $$I_{x'} = I_x - A \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

i 111 $$I_y = \frac{b^3 h}{3}; \quad I_{y'} = \frac{b^3 h}{12}$$

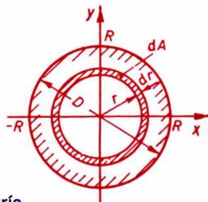
i 112 $$I_0 = I_x + I_y = \frac{b\,h^3}{3} + \frac{b^3\,h}{3} = \frac{b\,h}{3}(b^2 + h^2); \quad I_G = \frac{b\,h}{12}(b^2 + h^2)$$

i 113 $$I_{xy} = I_{x'y'} + \frac{b}{2}\,\frac{h}{2}\,A$$

Como x' y/o y' son ejes de simetría, $I_{x'y'} = 0$, y entonces:

i 114 $$I_{xy} = \frac{b}{2}\,\frac{h}{2}(b\,h) = \left(\frac{b\,h}{2} \right)^2$$

Círculo



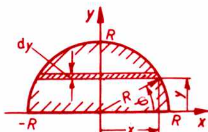
i 115 $$I_0 = \int_0^R r^2 \, dA = \int_0^R r^2 (2\pi\,r)\, dr$$

i 116 $$= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

i 117 $$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

i 118 $I_{xy} = 0$, puesto que x y y son ejes de simetría

Semicírculo



i 119 $$I_x = \int_0^R y^2 \, dA = \int_0^R y^2 (2\,x) dy$$

i 120 $$= 2 \int_0^R y^2 \sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi R^4}{8} = I_y$$

i 121 $$I_0 = 2 \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi R^4}{4};$$ $I_{xy} = 0$, porque y es eje de simetría.

Polígono regular de n lados

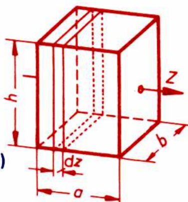
i 122 $$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{n\,a\,r}{2 \times 48}(12\,r^2 + a^2); \; I_{xy} = 0$$

r	Radio de la circunferencia inscrita	R	Radio de la circunferencia circunscrita
a	Longitud del lado	n	Número de lados

MOMENTOS DE INERCIA DE VOLUMENES

Prisma rectangular recto

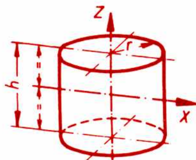
Si $\left(\frac{b\,h^3}{12}+\frac{b^3\,h}{12}\right)$ es el momento de inercia polar centroidal de un rectángulo (ver I 11), entonces, con relación al eje z, queda:



i 123 $$J_{z(V)}=\int_0^a\left(\frac{b\,h^3}{12}+\frac{b^3\,h}{12}\right)dz=\frac{a\,b\,h}{12}\,(b^2+h^2)$$

Cilindro circular recto

Con respecto al eje z:



i 124 $$J_{z(V)}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{\pi r^4}{4}\,dz=\frac{\pi r^4\,h}{2}$$

Con respecto al eje x:

i 125 $$J_{z(V)}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi\,r^4}{4}+\pi\,r^2\,z^2\right)dz=\frac{\pi\,r^2\,h}{12}\,(3r^2+h^2)$$

Momento de inercia de masa

Este momento, J, es el producto del momento de volumen $J_{(V)}$ por la densidad ρ:

i 126 $$J=J_{(V)}\,\rho \qquad [\mathrm{kg\cdot m^2}]$$

i 127 donde $\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{\gamma}{g}$ $\qquad [\mathrm{kg\cdot m^{-3}}]$

i 128 Ejemplo: Para un cilindro $J=J_{(V)}\,\dfrac{m}{V}=\dfrac{\pi r^4\,h}{2}\;\dfrac{m}{\pi r^2\,h}=\dfrac{m\,r^2}{2}$

Otros momentos de inercia de masa se tienen en M 3.

Probabilidad y estadística | J 1

PRINCIPIOS DE CONJUNTOS

j 1 Los *eventos* son conjuntos de resultados posibles. Se representan por colecciones de puntos de un espacio llamado *muestral*.

j 2 Evento *universal* es la colección de todos los puntos en el espacio muestral. Se representa por U.

j 3 Evento *nulo* (o *vacío*) es el que carece de puntos. Se representa por $\varnothing$.

j 4 La *unión* de dos eventos A y B es la colección de todos los puntos de A y de B. Se representa como $A + B$, o por $A \cup B$.

j 5 La *intersección* de dos eventos A y B es la colección de puntos que se encuentran simultáneamente en ambos eventos. Se representa como AB, o por $A \cap B$.

Eventos *mutuamente excluyentes* son aquellos que no tienen puntos en común.

j 6
$$A_i A_j = \begin{cases} A_i & \text{si } i = j \\ \varnothing & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Eventos *colectivamente exhaustivos* son aquellos cuya unión es el evento universal.

j 7
$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$$

AXIOMAS DE PROBABILIDAD [P( ) = PROBABILIDAD DE ( )]

j 8 $P(A) \geqq 0$, para cualquier evento A

j 9 $P(U) = 1$

j 10 $P(A + B) = P(B)$ si $AB = \varnothing$

Probabilidad *condicional*

j 11 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$

Independencia de eventos

Dos eventos A y B son *independientes* (estadísticamente) si

j 12 $P(A|B) = P(A)$

Variables aleatorias

Una *variable aleatoria* se define como una función que asigna un valor a cada resultado de la lista compuesta por resultados mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos de un experimento.
Las variables son *discretas* si el número total de valores que pueden tomar es *finito*. En caso contrario son *continuas*.

Función masa de probabilidad

Es la función que asigna una probabilidad a cada valor de la variable aleatoria.
$P_X(X_o)$ = probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome el valor X_o.

j 13 $0 \leqq P_X(X_o) \leqq 1$ y $\sum_{X_o} P_X(X_o) = 1$

Función densidad de probabilidad

Es una función para variables aleatorias continuas, tal que

j 14 $P(a < X \leqq b) = \int_{X_0=a}^{b} f_X(X_o)\, dX_o$

j 15 $0 \leqq f_X(X_o) \leqq \infty$ y $\int_{X_0=-\infty}^{\infty} f_X(X_o) = 1$

Distribución de probabilidad acumulada

j 16 $$P_X(X_o) = \begin{cases} \sum\limits_{X \leqq X_o} P_X(X_o) & X_o \text{ discreta} \\ \int_{X_o=-\infty}^{X_o} f_X(X_o)\, dX_o & X_o \text{ continua} \end{cases}$$

j 17 $$P_X(\infty) = 1, \quad P_X(-\infty) = 0$$

j 18 $$P(a < X \leqq b) = P_X(b) - P_X(a) \qquad \text{para } b \geqq a$$

j 19 $$\frac{d}{dX_o} P_X(X_o) = f_X(X_o)$$ para variables aleatorias continuas.

Función masa de probabilidad conjunta

j 20 $$0 \leqq P_{X,Y,Z}(X_o, Y_o, Z_o) \leqq 1$$

j 21 $$\sum_{X_o} \sum_{Y_o} \sum_{Z_o} P_{X,Y,Z}(X_o, Y_o, Z_o) = 1$$

Función densidad de probabilidad conjunta

j 22 $$0 \leqq f_{X,Y,Z}(X_o, Y_o, Z_o) < \infty$$

j 23 $$\int_{X_o=-\infty}^{\infty} dX_o \int_{Y_o=-\infty}^{\infty} dY_o \int_{X_o=-\infty}^{\infty} dZ_o \quad f_{X,Y,Z}(X_o, Y_o, Z_o) = 1$$

Función masa de probabilidad condicional.

j 24 $$P_{X|Y}(X_o \mid Y_o) = \frac{P_{X,Y}(X_o, Y_o)}{P_Y(Y_o)}$$

Función densidad de probabilidad condicional

j 25 $$F_{X|Y}(X_o \mid Y_o) = \frac{f_{X,Y}(X_o, Y_o)}{f_Y(Y_o)}$$

Esperanza (matemática)

j 26 $$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{X_o} g(X_o)\, P_X(X_o) & X\text{, variable aleatoria discreta} \\ \int_{X_o=-\infty}^{\infty} g(X_o)\, f_X(X_o)\, dX_o & X\text{, variable aleatoria continua} \end{cases}$$

Media (aritmética)

j 27 $$\bar{X} = E(X) = \begin{cases} \sum_{X_o} X_o\, P_X(X_o) & X\text{, discreta} \\ \int_{X_o=-\infty}^{\infty} X_o\, f_X(X_o)\, dX_o & X\text{, continua} \end{cases}$$

Variancia (o varianza)

j 28 $$\sigma_x^2 = E[(X - \bar{X})^2] = \begin{cases} \sum_{X_o} (X_o - X)^2\, P_X(X_o) & X\text{, discreta} \\ \int_{X_o=-\infty} (X_o - X)^2\, f_X(X_o)\, dX_o & X\text{, continua} \end{cases}$$

j 29 $$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Desviación estándar

j 30 $$\sigma_x = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

FUNCIONES MASA DE PROBABILIDAD MAS COMUNES, SU MEDIA Y SU VARIANCIA:

De Bernoulli

j 31 $$P_x(X_0) = \begin{cases} P & X_0 = 1 \\ 1 - P & X_0 = 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 32 $0 < P < 1, \quad E(X) = P, \quad \sigma_x^2 = P\,(1 - P)$

Binomial (o binómica)

j 33 $$P_x(X_0) = \begin{cases} (n)\, P^{X_0}\,(1 - P)^{n - X_0} & X_0 = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 34 $0 < P < 1 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad E\,(X) = nP \quad \sigma_x^2 = nP\,(1 - P)$

Geométrica

j 35 $$P_x(X_0) = \begin{cases} P\,(1 - P)^{X_0 - 1} & X_0 = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 36 $0 < P < 1 \quad E\,(X) = 1/P \quad \sigma_x^2 = (1 - P)/P^2$

De Pascal

j 37 $$P_x(X_0) = \begin{cases} \binom{X_0 - 1}{n - 1} P^n\,(1 - P)^{X_0 - n} & X_0 = n, n + 1, n + 2, \ldots \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 38 $0 < P < 1 \quad E\,(X) = n/P \quad \sigma_x^2 = n\,(1 - P)/P_2$

De Poisson

j 39
$$P_x(X_o) = \begin{cases} \dfrac{\mu^{X_o} e^{-\mu}}{X_o!} & X_o = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 40
$$\mu > 0 \qquad E(X) = \mu \qquad \sigma_x^2 = \mu$$

Funciones densidad de probabilidad más comunes, su media y su variancia:

Beta

j 41
$$f_x(X_o) = \begin{cases} \dfrac{1}{B} X_o^{r-1} (1 - X_o)^{t-r-1} & 0 \leqq X_o \leqq 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 42
$$B = \frac{(r-1)!\,(t-r-1)!}{(t-1)!} \quad E(X) = r/t$$

$$\sigma_x^2 = \frac{r(t-r)}{t^2\,(t+1)}$$

De Cauchy

j 43
$$f_x(X_o) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (X_o - b)^2} \qquad -\infty < X_o < \infty$$

j 44
$$a > 0 \qquad -\infty < b < \infty \qquad E(X) = b \qquad \sigma_x^2 = \infty$$

De Erlang

j 45 - 46
$$f_x(X_o) = \begin{cases} \dfrac{a^n X_o^{n-1} e^{-a X_o}}{(n-1)!} & X_o > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 47 $a > 0 \quad n = 1, 2, \ldots \quad E(X) = n/a \quad \sigma_X^2 = n/a^2$

Exponencial

j 48
$$f_X(X_o) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda X_o} & X_o > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 49 $\lambda > 0 \quad E(X) = 1/\lambda \quad \sigma_X^2 = 1/\lambda^2$

Normal

j 50
$$f_X(X_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(X_o - \mu)^2}{\sigma^2}\right] \qquad -\infty < X_o < \infty$$

j 51 $\sigma > 0 \quad E(X) = \mu \quad \sigma_X^2 = \sigma^2$

Uniforme

j 52
$$f_X(X_o) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < X_o < b \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

j 53 $a < b \quad E(X) = (a + b)/2 \quad \sigma_X^2 = (b - a)^2/12$

Regresión lineal

j 54 $y = mx + b$

j 55
$$m = \left(\frac{\sum X_i \sum Y_i}{N} - \sum X_i Y_i\right) \Big/ \left(\frac{(\sum X_i)^2}{N} - \sum X_i^2\right)$$

donde

N = total de observaciones

X_i, Y_i = i-ésimas observaciones de X y de Y

j 56 $$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

j 57 $$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

j 58 $$b = \bar{Y} - m\,\bar{X}$$

Variancia de los valores de X

j 59 $$\sigma_X{}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(X_i^2 - \bar{X}^2 \right)$$

Variancia de los valores de Y

j 60 $$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i^2 - \bar{Y}^2 \right)$$

Coeficiente de correlación

j 61 $$r = m\,\sigma_X / \sigma_Y$$

Desigualdad de Chebyshev

j 62 $$\mathrm{P}\left(|X - E(X)| \geqq t \right) \leqq \left(\frac{\sigma_X}{t} \right)^2$$

Convergencia estocástica

Una secuencia (o sucesión) de variables aleatorias $X_n = X_1, X_2, \ldots,$ se dice que converge estocásticamente a L si para cada $\epsilon > 0$, se verifica la condición

j 63 $$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(|X_n - L| > \epsilon \right) = 0.$$

Estática

Conceptos generales

La estática analiza las fuerzas externas (o cargas) y las condiciones de equilibrio de cuerpos rígidos, así como la determinación de fuerzas desconocidas (por ejemplo, fuerzas de apoyo). El contenido de las páginas K 1 a K 14 se refiere a fuerzas en *un* plano.

Longitud l

Es una magnitud base; véanse las explicaciones al principio.

Fuerza F (Ver las explicaciones en M 1)

Representación mediante un vector.

Longitud de la flecha: Magnitud

Angulo director: Dirección

Punto de aplicación: Posición (P)



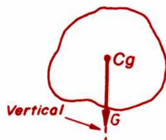
Peso G

Definición: Atracción gravitatoria

Punto de aplicación: Centro de gravedad

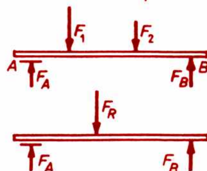
Dirección: Vertical hacia abajo (al centro de la Tierra)

Magnitud: Se determina mediante un dinamómetro



Fuerzas de apoyo F_A, F_B

Son las reacciones sobre el cuerpo ejercidas por los apoyos (A, B).



Fuerza resultante F_R

Es la fuerza calculada que produce por sí sola el efecto de otras fuerzas.

Magnitud del momento de una fuerza F respecto de un punto O

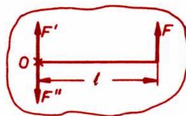
k 1 Momento $M = F\,l$



Efecto equivalente de una fuerza F **con respecto a un punto O**

El efecto de una fuerza F respecto al punto O se puede sustituir por el del par de fuerzas F, F'' y la fuerza F'.

k 2 $$F' = F; \qquad F'' = -F$$



Magnitud del momento del par de fuerzas

k 3 $$M = F\,l$$

Teorema de los momentos: El momento de la fuerza resultante es igual a la suma de los momentos de las fuerzas componentes.

Estática

Composición de fuerzas

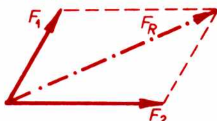
K 2

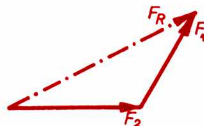
METODO GRAFICO

Sistemas de fuerzas	Polígono de las fuerzas

Paralelogramo de las fuerzas

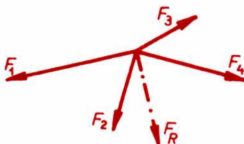
k 4

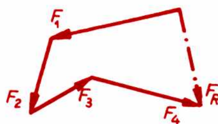




Fuerzas concurrentes

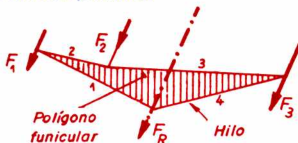
k 5

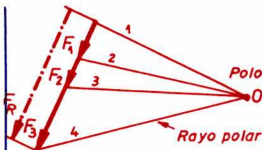




Fuerzas paralelas

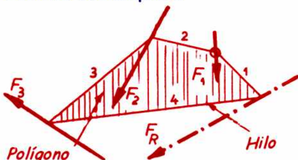
k 6

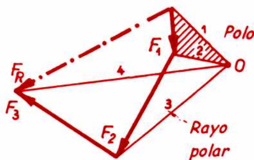




Fuerzas cualesquiera

k 7

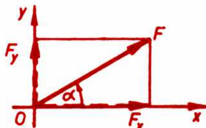




Construcción del polígono funicular: Trace el polígono de las fuerzas. Seleccione el polo *0* de modo que no haya rayos polares colineales, y trace éstos. Dibuje los hilos del funicular paralelamente a los rayos. A cada triángulo en el polígono de las fuerzas debe corresponder un punto de intersección de dos hilos consecutivos en el funicular. (Por ejemplo, al triángulo F_1-1-2 le corresponde el punto de intersección en F_1 de los hilos 1 y 2.)

METODO ANALITICO

Descomposición de una fuerza

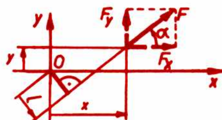


k 8 $F_x = F \cos \alpha$ | $F_y = F \operatorname{sen} \alpha$

k 9 $F = +\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ | $\tan \alpha = \dfrac{F_y}{F_x}$

(Ver el signo de las funciones trigonométricas en la tabla siguiente).

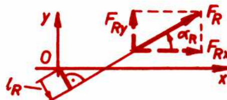
Momento M_o de una fuerza respecto a un punto *0*



k 10 $M_o = +F\,l = F_y\,x - F_x\,y$

(Determinación de F_x y F_y de acuerdo con k 8)

Resultante F_R de fuerzas cualesquiera



k 11 Componentes $F_{Rx} = \Sigma F_x$ | $F_{Ry} = \Sigma F_y$

k 12 Magnitud $F_R = +\sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$

k 13 Angulo director α_R } $\tan \alpha_R = \dfrac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$; $\operatorname{sen} \alpha_R = \dfrac{F_{Ry}}{F_R}$; $\cos \alpha_R = \dfrac{F_{Rx}}{F_R}$

k 14 Distancia $l_R = \dfrac{|\Sigma M_o|}{|F_R|}$ (Teorema de los momentos)

k 15 Signo de $F_R \cdot l_R$ = Signo de ΣM_o

Signos de las funciones trigonométricas de coordenadas y componentes

	Cuadrante	α, α_R	$\cos \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\tan \alpha$	x, F_x, F_{Rx}	y, F_y, F_{Ry}
k 16	I	0° - 90°	+	+	+	+	+
k 17	II	90° - 180°	−	+	−	−	+
k 18	III	180° - 270°	−	−	+	−	−
k 19	IV	270° - 360°	+	−	−	+	−

F_x, F_y Componentes de F en las direcciones x y y
F_{Rx}, F_{Ry} Componentes de F_R en las direcciones x y y
x, y Coordenadas del punto de aplicación de F
α, α_R Angulo director de F y F_R, respectivamente
l l_R Distancia de F y F_R, respectivamente, al punto de referencia

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

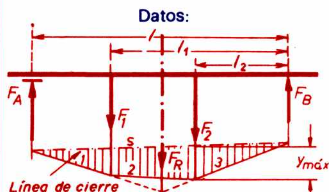
Un cuerpo está en equilibrio si la resultante y la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto a un punto cualquiera son iguales a cero.

	Fuerzas	Condiciones gráficas	Condiciones analíticas
k 20	Concurrentes	Polígono de fuerzas cerrado	$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0$
k 21	Paralelas al eje *y*	Polígono de fuerzas y funicular cerrados	$\Sigma F_y = 0; \Sigma M = 0$
k 22 k 23	Cualesquiera		$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$

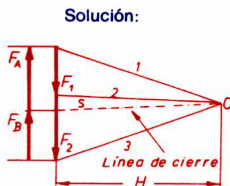
Ejemplos

Viga con dos apoyos — Incógnitas: Reacciones F_A, F_B

Datos:



Solución:



$M_{máx} = k_M \cdot y_{máx}$ (momento flexionante máximo)

$k_M = k_F \cdot k_L \cdot H$ (escala de momentos) [N · m/m, kgf · m/mm]

k 24 k_F : escala de fuerzas [N/m, kgf/mm]

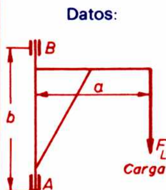
k_L : escala de longitudes [m/m, m/mm]

H : distancia polar

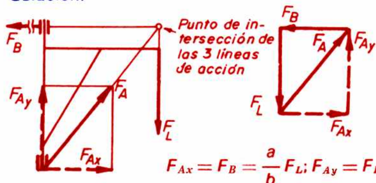
$F_A = F_1 \cdot l_1/l + F_2 \cdot l_2/l$; $F_B = (F_1 + F_2) - F_A$

Grúa de pared: Ejemplo de 3 fuerzas. Incógnitas: F_A, F_B

Datos:



Solución:



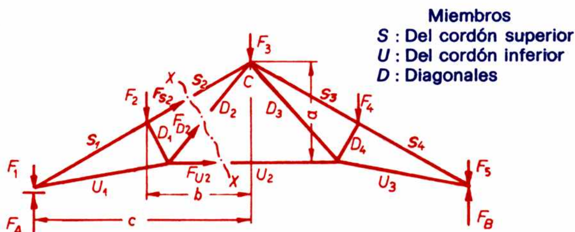


k 25

$F_{Ax} = F_B = \frac{a}{b} F_L$; $F_{Ay} = F_L$

DETERMINACION ANALITICA DE LAS FUERZAS EN LAS BARRAS (F_S, F_U, F_D)

Método de Ritter o de secciones




k 26

Obtenga las reacciones en los apoyos por medio de K 4 (viga con dos apoyos) y pase una sección $X-X$ en la armadura, tal que corte a la barra en estudio y no seccione más de tres barras. Considere que todas las fuerzas son de tensión; entonces las que sí lo sean resultarán positivas, y las de compresión, negativas.

Aplique la ecuación de momentos $\Sigma M = 0$ a las fuerzas externas e internas, referida al punto de intersección de dos fuerzas desconocidas. Los momentos de cada una de éstas se anularán.

Regla para los signos de los momentos:

Momento en el sentido del reloj: $-$
Momento en sentido contrario: $+$

Ejemplo para la armadura anterior

Determinar la fuerza F_{U2} en la barra U_2

Solución:

Pase la sección $X-X$ de modo que corte S_2, D_2, U_2. Como S_2 y D_2 se cortan en C, se elige este punto como centro de momentos. Con ésto se logra que los momentos de S_2 y D_2 se anulen y, por tanto, no aparecerán en la ecuación de momentos.

De modo que $\Sigma M_C = 0$. Por lo tanto,

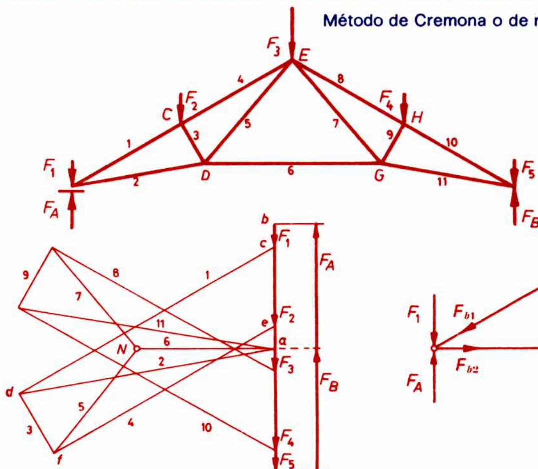
$$+a\,F_{U2} + b\,F_2 - c\,(F_A - F_1) = 0$$

$$F_{U2} = \frac{-b\,F_2 + c(F_A - F_1)}{a}$$

DETERMINACION GRAFICA DE LAS FUERZAS EN LAS BARRAS (F_b)

Método de Cremona o de nudos

k 27



Reglas básicas

Todas las barras van de nudo a nudo. Las fuerzas externas sólo se aplican en los nudos.

Procedimiento

Establezca la escala de fuerzas y determine las reacciones en los apoyos. Como un polígono de fuerzas puede tener sólo dos incógnitas debe empezar en el punto *A*. En todos los nudos debe seguirse el mismo sentido de recorrido. Por ejemplo,

$$F_A - F_1 - F_{b1} - F_{b2}.$$

Nudo *A*: Polígono de fuerzas: *abcda*
La clase de fuerza (tensión o compresión) debe anotarse en un croquis o tabla.

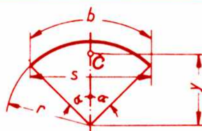
Nudo *C*: Polígono de fuerzas: *dcefd*, etc.

Comprobación

Las fuerzas que concurren en *un nudo* de la armadura deben formar un polígono en el diagrama de Cremona.

Las fuerzas que concurren en *un punto* en el diagrama de Cremona deben corresponder a un triángulo en la armadura.

Arco de circunferencia



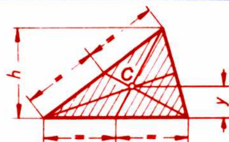
k 28 $y = \dfrac{r\,(\text{sen}\,\alpha)\,(180°)}{\pi\,(\alpha°)} = \dfrac{r\,s}{b}$

k 29 $y = 0.6366\,r$ si $2\alpha = 180°$

k 30 $y = 0.9003\,r$ si $2\alpha = 90°$

k 31 $y = 0.9549\,r$ si $2\alpha = 60°$

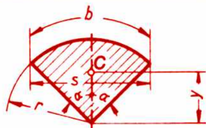
Triángulo



k 32 $y = \dfrac{1}{3}\,h$

C está en el punto de intersección de las medianas.

Sector de círculo



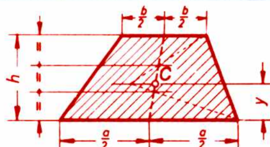
k 33 $y = \dfrac{2r\,(\text{sen}\,\alpha)\,(180°)}{3\,\pi\,(\alpha°)} = \dfrac{2r\,s}{3b}$

k 34 $y = 0.4244\,r$ si $2\alpha = 180°$

k 35 $y = 0.6002\,r$ si $2\alpha = 90°$

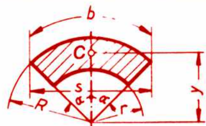
k 36 $y = 0.6366\,r$ si $2\alpha = 60°$

Trapecio



k 37 $y = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{a + 2b}{a + b}$

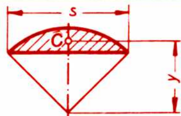
Segmento de corona circular



k 38 $y = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$

k 39 $y = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \dfrac{s}{b}$

Segmento de círculo



k 40 $y = \dfrac{s^3}{12\,A}$

Para el área *A* véase B 3.

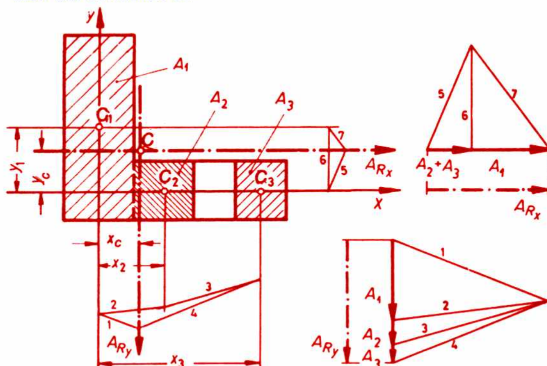
Para la determinación del centroide *C* (o *Cg*) véase también I 7

DETERMINACION DEL CENTROIDE DE SUPERFICIES COMPUESTAS

Método gráfico

Descomponga la superficie total A en superficies parciales A_1, A_2, . . . , A_n, cuyos centroides sean conocidos. La dimensión del área de cada superficie se considera como una fuerza aplicada en el centroide del área correspondiente. Con la ayuda del polígono funicular (K 2) se determina ahora la posición del punto de aplicación de las componentes A_{Rx} y A_{Ry} en dos direcciones cualesquiera (de preferencia que formen un ángulo de 90°). El punto de intersección de las líneas de acción de estas componentes da la posición del centroide C.

k 41



Método analítico

Descomponga también la superficie total A en superficies parciales A_1, A_2, . . . , A_n. Entonces se tiene:

	Coord.	Caso general	Para el ejemplo anterior
k 42	$x_C =$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}$	$\dfrac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A}$
k 43	$y_C =$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}$	$\dfrac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A}$

En el ejemplo, x_1, y_2 y y_3 son nulas.

FUERZA APLICADA PARALELAMENTE AL PLANO DE DESLIZAMIENTO

	Fricción estática	Valor límite	Fricción dinámica
k 44	$v = 0$	$v = 0$	$\longrightarrow v > 0$
k 45	$F_{f1} = -F_1 = G \tan \phi_1$	$F_{f0} = -F_0 = G \tan \phi_0$	$F_f = -F = G \tan \phi$
k 46	$N = -G$	$N = -G$	$N = -G$
k 47		$\mu_0 = \tan \phi_0 > \mu$	$\mu = \tan \phi < \mu_0$
k 48	$0 < \phi_1$ (variable) $< \phi_0$	$\phi_0 =$ const. $> \phi$	$\phi =$ const. $< \phi_0$

Si F_1 aumenta lentamente, también lo hará F_{f1}, sin que el cuerpo se mueva. Si F_1 alcanza el valor:

k 49 $$F_0 = G\mu_0,$$

entonces empieza a deslizar el cuerpo, y F disminuye al valor $G\mu$. El valor excedente de la fuerza F se emplea ahora exclusivamente para acelerar el cuerpo.

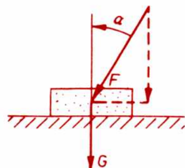


FUERZA APLICADA OBLICUAMENTE RESPECTO AL PLANO DE DESLIZAMIENTO

Fuerza F necesaria para mantener el deslizamiento del cuerpo con peso G:

k 50 $$F = G \frac{\mu_0}{\operatorname{sen} \alpha - \mu_0 \cos \alpha} = G \frac{\operatorname{sen} \phi_0}{\operatorname{sen} (\alpha - \phi_0)}$$

Para el movimiento con velocidad constante se determina la fuerza necesaria sustituyendo μ_0 por μ. No es posible el movimiento si F resulta negativa.



F_1, F_0, F	Fuerza aplicada	R	Reacción total
F_{f1}, F_{f0}, F_f	Fuerza de fricción	μ_0, μ	Coef. de fricción (ver Z 20)
N	Reacción normal	ϕ_1, ϕ_0, ϕ	Angulo de fricción

ROZAMIENTO EN UN PLANO INCLINADO

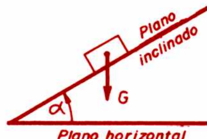
Generalidades

El ángulo α para el cual un cuerpo desliza bajando con velocidad constante en un plano inclinado, es igual al ángulo de fricción ϕ, de donde:

k 51 $$\tan\alpha = \tan\phi = \mu$$

Aplicación a la determinación experimental del ángulo de fricción o del coeficiente de fricción.

$$\mu = \tan\phi$$



k 52 Condición para la inmovilidad $\alpha < \phi$

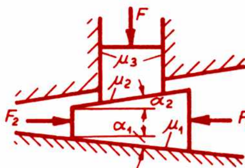
Condiciones de fricción:

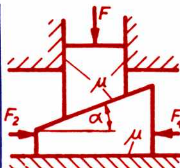
	Movimiento hacia	Fuerza aplicada F para lograr una velocidad constante paralela al plano inclinado	Fuerza aplicada F para lograr una velocidad constante paralela al plano horizontal
k 53	arriba $0 < \alpha < \alpha^*$	$F = G \dfrac{\text{sen}(\alpha+\phi)}{\cos\phi}$	$F = G \tan(\alpha+\phi)$
k 54	abajo $0 < \alpha < \phi$	$F = G \dfrac{\text{sen}(\phi-\alpha)}{\cos\phi}$	$F = G \tan(\phi-\alpha)$
k 55	abajo $\phi < \alpha < \alpha^*$	$F = G \dfrac{\text{sen}(\alpha-\phi)}{\cos\phi}$	$F = G \tan(\alpha-\phi)$

Observación: Para el caso de fricción estática sustituya μ por μ_0 y ϕ por ϕ_0, respectivamente.

α^* Angulo de volteo del cuerpo.

CUÑAS








k 56	Al introducir:	$F_1 = F \dfrac{\tan(\alpha_1+\phi_1)+\tan(\alpha_2+\phi_2)}{1-\tan\phi_3\cdot\tan(\alpha_2+\phi_2)}$	$F_1 = F\tan(\alpha+2\phi)$
k 57	Al soltar	$F_2 = F \dfrac{\tan(\alpha_1-\phi_1)+\tan(\alpha_2-\phi_2)}{1+\tan\phi_3\cdot\tan(\alpha_2-\phi_2)}$	$F_2 = F\tan(\alpha-2\phi)$
k 58	Autosujeción	$\alpha_1+\alpha_2 \leqq \phi_{01}+\phi_{02}$	$\alpha \leqq 2\phi_0$

TORNILLOS DE FUERZA







k 59	Momento para	subir	$M_1 = F\,r\tan(\alpha+\phi)$	$M_1 = F\,r\tan(\alpha+\phi')$
k 60		bajar	$M_2 = F\,r\tan(\alpha-\phi)$	$M_2 = F\,r\tan(\alpha-\phi')$
k 61	Condición de autosujeción al bajar		$\alpha<\phi$	$\alpha<\phi'$
k 62	Eficiencia de un tornillo para	subir	$\eta = \dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\phi)}$	$\eta = \dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\phi')}$
k 63		bajar	$\eta = \dfrac{\tan(\alpha-\phi)}{\tan\alpha}$	$\eta = \dfrac{\tan(\alpha-\phi')}{\tan\alpha}$

M_1 Momento para subir
M_2 Momento para bajar

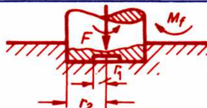
α Angulo del tornillo ($\tan\alpha = h/2\pi r$)

k 64 ϕ Angulo de fricción ($\tan\phi = \mu$)

k 65 ϕ' Angulo de fricción en rosca triangular, diente de sierra o trapecial $\left[\tan\phi' = \mu/(\cos\beta/2)\right]$

k 66 r Radio medio de la rosca

FRICCION DE CHUMACERAS

Chumaceras comunes o de carga radial	Chumaceras de empuje o de carga axial
	
k 67 $M_f = \mu_r \, r \, F$	$M_f = \mu_a \dfrac{r_1 + r_2}{2} F$

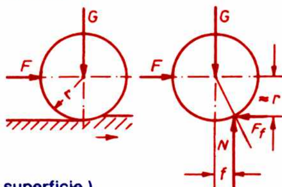
M_f momento de fricción.
μ_r coeficiente de fricción para carga radial (no existe valor fijo)
μ_a coeficiente de fricción para carga axial (no hay valor fijo)

Observación: μ_r y μ_a se determinan experimentalmente como funciones de la holgura, de la lubricación y del estado de la chumacera.

k 68 En chumaceras ya rodadas: $\mu_0 \cong \mu_r \cong \mu_a$
k 69 Por lubricación debe tomarse siempre $r_1 > 0$.

FRICCION RODANTE

Rodamiento de un cilindro macizo

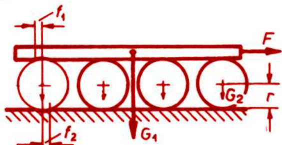


k 70 $F = \dfrac{f}{r} N \cong \dfrac{f}{r} G$

k 71 Condición de rodamiento: $F_f < \mu_0 N$

F_f Fuerza de fricción rodante.
f Brazo de palanca de la fuerza de fricción rodante. Valores en Z 20. (Causado por deformación de la rueda y la superficie.)
μ_0 Coeficiente de fricción estática entre rueda y superficie de apoyo.

Movimiento de una placa sobre rodillos.



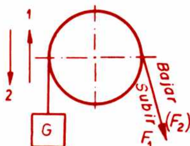
k 72 $F = \dfrac{(f_1 + f_2) \, G_1 + n \, f_2 \, G_2}{2 \, r}$

k 73 Si $f_1 = f_2 = f$ y $nG_2 < G_1$:

k 74 $F = \dfrac{f}{r} G_1$

G_1, G_2 Peso de la placa y de un cilindro, respectivamente.
F Fuerza de tracción
f_1, f_2 Brazos de palanca de la fuerza de fricción rodante
r Radio del cilindro | n Número de cilindros.

FRICCION EN CABLES



	Fuerzas de tracción y de fricción para subir	bajar
k 75	$F_1 = e^{\mu\alpha} G$	$F_2 = e^{-\mu\alpha} G$
k 76	$F_f = (e^{\mu\alpha}_{f} - 1)\, G$	$F_f = (1 - e^{-\mu\alpha})\, G$

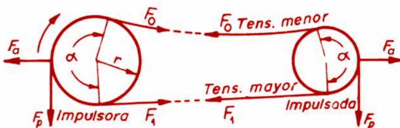
la carga G

Estas leyes son válidas si el cilindro está fijo y el cable se mueve con velocidad uniforme; o si el cable está fijo y se mueve el cilindro; por ejemplo: freno de banda, cabrestante.

k 77 *Condición de equilibrio*: $F_2 < F < F_1 \parallel G\, e^{-\mu\alpha} < F < G\, e^{\mu\alpha}$

(F Fuerza de equilibrio sin fricción)

Transmisión de banda o correa



k 78 $F_p = \dfrac{M_i}{r}$

k 79 $F_p = F$

	Fuerzas	en movimiento	en reposo
k 80	F_0	$F_0 = \dfrac{F_p}{e^{\mu\alpha} - 1}$	$F_0 = F_1 = \dfrac{F_a}{2}\dfrac{(e^{\mu\alpha} + 1)}{(e^{\mu\alpha} - 1)}$
k 81	F_1	$F_1 = F_p \dfrac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$	
k 82	F_a	$F_a = F_p \dfrac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}$	

F_p Fuerza periférica

F_f Fuerza de fricción

M_i Momento de impulsión

α Angulo de contacto en radianes. Debe emplearse siempre en las fórmulas su valor más pequeño

μ Coeficiente de fricción de deslizamiento. (Valor empírico para
k 83 bandas de cuero sobre poleas de acero, $\mu = 0.22 + 0.012\, v$)

v Velocidad de la banda (m/s)

e 2.718281 . . . (Base de los logaritmos naturales)

POLEAS Y POLIPASTOS

Los valores indicados toman en cuenta sólo la rigidez de los cables y no la fricción en los cojinetes.

	Incógnita	Polea fija	Polea móvil	Polipasto Común	Polipasto Diferencial
k 84	$F_1 =$	$\epsilon\, G$	$\dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}\, G$	$\dfrac{\epsilon^n(\epsilon-1)}{\epsilon^n-1}\, G$	$\dfrac{\epsilon^2-\dfrac{d}{D}}{\epsilon+1}\, G$
k 85	$F_0 =$	$\dfrac{1}{\epsilon}\, G$	$\dfrac{1}{1+\epsilon}\, G$	$\dfrac{\dfrac{1}{\epsilon^n}\left(\dfrac{1}{\epsilon}-1\right)}{\dfrac{1}{\epsilon^n}-1}\, G$	$\dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}\left(\dfrac{1}{\epsilon^2}-\dfrac{d}{D}\right) G$
k 86	$F =$	G	$\dfrac{1}{2}\, G$	$\dfrac{1}{n}\, G$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{d}{D}\right) G$
k 87	$s =$	h	$2\,h$	$n\,h$	$\dfrac{2\,h}{1-d/D}$

k 88 Ventaja mecánica $i = \dfrac{\text{Fuerza}}{\text{Carga}} = \dfrac{F_0}{G} = \dfrac{h}{s}$

F_1 Fuerza para subir la carga (sin fricción)

F_0 Fuerza para bajar la carga (sin fricción)

F Fuerza sin considerar la rigidez del cable ni la fricción

k 89 $\epsilon = \dfrac{1}{\eta}$ Factor de pérdida por la rigidez del cable (para cables metálicos y cadenas $\cong$ 1.05)

η Eficiencia

n Número de poleas

s Recorrido de la fuerza

h Recorrido de la carga

Cinemática
Conceptos generales

L 1

GENERALIDADES

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos en función del tiempo.

Cantidades más importantes de la cinemática y sus unidades

Longitud l, ver K 1

Angulo, ver E 1

Tiempo t

Véanse las explicaciones al principio del libro. Unidades: s, min, h

Frecuencia f

La frecuencia de una oscilación es el número de ciclos (alternaciones completas) por unidad de tiempo.

l 1
$$f = \frac{\text{Número de oscilaciones}}{\text{Tiempo de observación}}$$

Unidades: Hz (hertz) = c/s = 1/s (c = ciclo)

Periodo T

El periodo es el tiempo en que se efectúa una oscilación (o rotación) completa. Es el recíproco de la frecuencia.

l 2
$$T = \frac{1}{f}$$

Unidades: s

Frecuencia de rotación o número de revoluciones por unidad de tiempo

La frecuencia de rotación de un cuerpo giratorio es la relación entre el número de vueltas o revoluciones y el tiempo de observación.

l 3
$$n = \frac{\text{Número de revoluciones}}{\text{Tiempo de observación}}$$

Unidades; 1/s, 1/min; rev/s, rpm.

El recíproco de n es la duración de cada vuelta o revolución.
Si una oscilación o vibración está relacionada directamente con una rotación y sus periodos son iguales, entonces $n = f$.

Cinemática

Conceptos generales

Velocidad v

La velocidad v es la primera derivada de la distancia recorrida s con respecto al tiempo t:

/ 4 $$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Si la velocidad es constante en el tiempo se tiene:

/ 5 $$v = \frac{s}{t}$$

Unidades: m/s, km/h

Velocidad angular ω, frecuencia angular ω

La velocidad angular ω es la primera derivada con respecto al tiempo del ángulo de giro o rotación:

/ 6 $$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Si la velocidad angular es constante en el tiempo:

/ 7 $$\omega = \frac{\phi}{t}$$

En el caso en que $f = n$ (ver / 3) la velocidad angular ω es igual a la frecuencia angular ω

/ 8 $$\omega = 2\pi f = 2\pi n = \dot{\phi}$$

Unidades: 1/s, rad/s

Aceleración a

La aceleración a es la primera derivada de la velocidad v con respecto al tiempo t:

/ 9 $$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

Unidades: m/s², (km/h)/s

Aceleración angular α

La aceleración angular α es la primera derivada de la velocidad angular ω con respecto al tiempo t:

/ 10 $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \ddot{\phi}$$

Unidades: 1/s², rad/s²

DISTANCIA RECORRIDA, VELOCIDAD Y ACELERACION DE UN PUNTO MATERIAL EN MOVIMIENTO

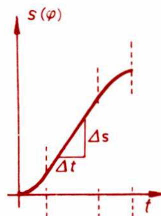


Diagrama recorrido-tiempo (curva *s-t*)

Una gráfica *s-t* se traza a partir de la forma del movimiento en función del tiempo. La primera derivada de esta función expresa la velocidad *v* en un instante determinado.

$$v \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

/ 11 $$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

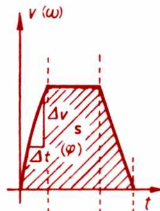


Diagrama velocidad-tiempo (curva *v-t*)

La variación de la velocidad se representa en una gráfica *v-t*. La primera derivada de la función respectiva da la aceleración *a* en un instante determinado. Por lo tanto, es también la segunda derivada de la función que corresponde a la distancia recorrida *s*.

$$a \cong \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

/ 12 $$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

La superficie hachurada representa el recorrido $s(t)$.

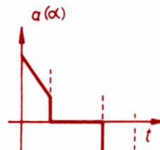


Diagrama aceleración tiempo (curva *a-t*)

La variación de la aceleración se representa en una gráfica *a-t*, que permite determinar valores extremos.

/ 13 $a > 0$ La aceleración positiva corresponde a aumento en la velocidad.

/ 14 $a < 0$ La aceleración negativa (retardación o desaceleración) corresponde a disminución en la velocidad.

Nota para las figuras

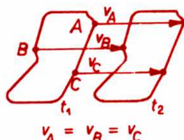
Las literales entre paréntesis corresponden al movimiento angular o de rotación (ver L 2 y L 6).

Cinemática

Movimientos principales

TRASLACION O MOVIMIENTO RECTILINEO

Las trayectorias son rectas (ver L 5). Todos los puntos de un cuerpo describen trayectorias idénticas.

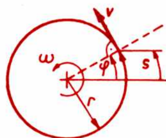


Movimientos rectilíneos especiales

	uniforme	uniformemente acelerado
ℓ 15	$v = v_0 =$ const.	$a = a_0 =$ constante

ROTACION O MOVIMIENTO CIRCULAR ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

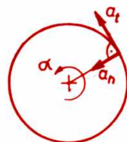
Las trayectorias son circulares (ver L 6) estando el eje en el centro. El ángulo de giro ϕ, la velocidad angular ω y la aceleración angular α tienen igual valor en todos los puntos.



Movimientos circulares especiales

	uniforme	uniformemente acelerado
ℓ 16	$\omega = \omega_0 =$ constante	$\alpha = \alpha_0 =$ constante

La distancia recorrida s, la velocidad v y la aceleración tangencial a_t son proporcionales al radio:



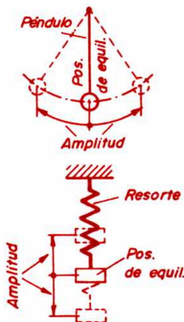
ℓ 17 $s = r\phi\,;\quad v = r\omega\,;\quad a = r\alpha = a_t$

ℓ 18 Aceleración normal (o centrípeta) $a_n = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$

MOVIMIENTO ARMONICO

Las trayectorias son circulares (ver M 7) o rectas (ver L 7, M 6). El cuerpo se mueve a uno y otro lado de su posición de equilibrio. El máximo desplazamiento con respecto a esta posición se llama *amplitud*.

En el caso de las oscilaciones armónicas la posición, la velocidad y la aceleración son funciones senoidales del tiempo.



Cinemática

Movimiento rectilíneo

MOVIMIENTOS UNIFORME Y UNIFORMEMENTE ACELERADO

	Magnitud a calcular	uniforme $a = 0$ $v = \text{const}$	uniformemente { acelerado $(a > 0)$ / retardado $(a < 0)$ } $a = \text{const.}$ $v_0 = 0$	 $v_0 > 0$	EU
19	$s =$	$v\,t$	$\frac{v\,t}{2} = \frac{a\,t^2}{2} = \frac{v^2}{2\,a}$	$\frac{t}{2}(v_0 + v) = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$	m cm km
20	$v =$	$\frac{s}{t}$	$\sqrt{2as} = \frac{2\,s}{t} = a\,t$	$v_0 + a\,t = \sqrt{v_0^2 + 2as}$	m/s cm/s km/h
21	$v_0 =$	const.	0	$v - a\,t = \sqrt{v^2 - 2as}$	
22	$a =$	0	$\frac{v}{t} = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{v^2}{2\,s}$	$\frac{v - v_0}{t} = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,s}$	m/s² cm/h² km/h²
23	$t =$	$\frac{s}{v}$	$\sqrt{\frac{2\,s}{a}} = \frac{v}{a} = \frac{2\,s}{v}$	$\frac{v - v_0}{a} = \frac{2\,s}{v_0 + v}$	s min h

Nota: Las regiones hachuradas representan la distancia recorrida s en un intervalo de tiempo t.
La tangente del ángulo β representa la aceleración a.

Cinemática

Movimiento circular alrededor de un eje fijo

L 6

MOVIMIENTOS UNIFORME Y UNIFORMEMENTE ACELERADO

	Magnitud a calcular	uniforme $\alpha = 0$, $\omega =$ const.	uniformemente acelerado ($\alpha > 0$) / retardado ($\alpha < 0$); $\alpha =$ const.; $\omega_0 = 0$	$\omega_0 > 0$	EU
/ 24	$\phi =$	ωt	$\frac{\omega t}{2} = \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\omega^2}{2\alpha}$	$\frac{t}{2}(\omega_0 + \omega) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	— rad
/ 25	$\omega =$	$\frac{\phi}{t}$	$\sqrt{2\alpha\phi} = \frac{2\phi}{t} = \alpha t$	$\omega_0 + \alpha t = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\phi}$	1/s
/ 26	$\omega_0 =$	const.	0	$\omega - \alpha t = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha\phi}$	m/m·s² rad/s
/ 27	$\alpha =$	0	$\frac{\omega}{t} = \frac{2\phi}{t^2} = \frac{\omega^2}{2\phi}$	$\frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\phi}$	1/s² m/m·s² rad/s²
/ 28	$t =$	$\frac{\phi}{\omega}$	$\sqrt{\frac{2\phi}{\alpha}} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\phi}{\omega}$	$\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2\phi}{\omega_0 + \omega}$	s min h

Nota: Las regiones hachuradas representan el ángulo descrito ϕ (en radianes) en un intervalo de tiempo t.

Angulo de giro: $\phi = 2\pi \cdot$ Núm. de vueltas
$\phi° = 360° \cdot$ Núm. de vueltas

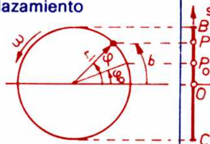
La tangente del ángulo β representa la aceleración α.

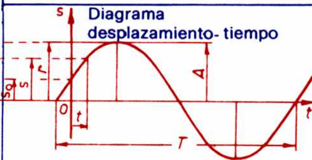
OSCILACIONES ARMONICAS RECTILINEAS

El movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte helicoidal es una oscilación de esta clase. Las funciones del tiempo *s, v, a* en este movimiento son iguales a las proyecciones sobre un diámetro fijo, de las cantidades *s, v* y a_n correspondientes al movimiento circular uniforme de un punto material.

Movimiento circular uniforme	Oscilaciones armónicas

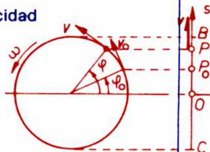
Desplazamiento

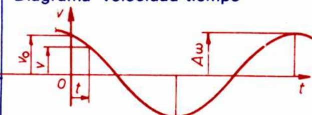




/29 $\phi = \omega t + \phi_0$; $b = r(\omega t + \phi_0)$ $\qquad$ $s = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$

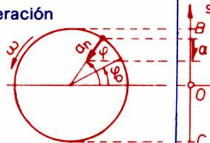
Velocidad

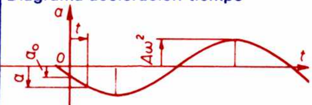




/30 $v = r\omega$ $\qquad$ $v = \dfrac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi_0)$

Aceleración





/31 $\alpha = 0$; $a_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$ $\qquad$ $a = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$

Ecuación diferencial de una oscilación armónica

/32 $$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

ϕ_0	Posición angular cuando $t = 0$	s	Desplazamiento lineal
ϕ	Posición angular al tiempo t	A	Amplitud (despl. máx.)
a_n	Aceleración centrípeta	r	Radio de la trayectoria circular
$\underline{r}$	Radio (vector) de posición	b	Arco de trayectoria
B, C	Límites de la oscilación		

Cinemática

Caída libre y tiro

L 8

CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

	Magnitud a calcular	Caída libre $v_0 = 0$	Tiro vertical { hacia arriba $(v_0 > 0)$ / hacia abajo $(v_0 < 0)$	EU
		0, +h — Nivel de partida	+h, 0 — Nivel de partida	
33	$h =$	$\frac{g}{2} t^2 = \frac{v}{2} t = \frac{v^2}{2g}$	$v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = \frac{v_0 + v}{2} t$	m, cm
34	$v =$	$g t = \frac{2h}{t} = \sqrt{2gh}$	$v_0 - g t = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$	m/s, km/h
35	$t =$	$\frac{v}{g} = \frac{2h}{v} = \frac{2h}{g}$	$\frac{v_0 - v}{g} = \frac{2h}{v_0 + v}$	s, min

TIRO HORIZONTAL E INCLINADO

	Magnitud a calcular	Tiro horizontal $\alpha = 0$, $v_0 > 0$	Tiro inclinado { hacia arriba $(\alpha > 0)$ / hacia abajo $(\alpha < 0)$, $v_0 > 0$	EU
		o, v_0, s, h, s, h	h, s, v_0, V hacia arriba, α, h, H, s, 0, hacia abajo, L	
36	$s =$	$v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$	$v_0 t \cos \alpha$	m, cm
37	$h =$	$\frac{g}{2} t^2$	$v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{g}{2} t^2$	m, cm
38	$v =$	$\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$	$\sqrt{v_0^2 - 2gh}$	m/s, km/s

ALCANCE L Y ALTURA SUPERIOR H EN EL TIRO OBLICUO

39	Valores cuales-quiera	$L = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha$	$H = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$	m, cm
40		$t_L = \frac{2 v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$	$t_H = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$	s, min
		cuando $\alpha = 45°$	cuando $\alpha = 90°$	
41	Valores máximos	$L_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$	$H_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$	m, cm
42		$t_{L\,máx} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g}$	$t_{H\,máx} = \frac{v_0}{g}$	s, min

α Angulo de tiro (respecto a la horizontal)

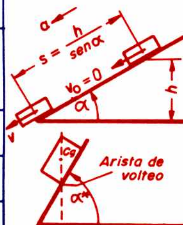
t_H Tiempo para la altura H | t_L Tiempo para el alcance L

Cinemática

Movimiento en el plano inclinado

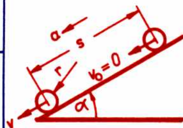
DESLIZAMIENTO

	Magnitud a calcular	sin fricción $\mu = 0$	con fricción $\mu > 0$
/ 43	$a =$	$g \operatorname{sen} \alpha$	$g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$
/ 44			o bien, $g \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \phi)}{\cos \phi}$
/ 45	$v =$	$at = \dfrac{2s}{t} = \sqrt{2as}$	
/ 46	$s =$	$\dfrac{at^2}{2} = \dfrac{v\,t}{2} = \dfrac{v^2}{2a}$	
	α	$0 \ldots \alpha^*$	$\phi_o \ldots \alpha^*$



RODAMIENTO

	Magnitud a calcular	sin fricción $f = 0$	con fricción $f > 0$
/ 47	$a =$	$\dfrac{g\,r^2}{r^2 + r_i^2} \operatorname{sen} \alpha$	$g\,r^2 \dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \dfrac{f}{r} \cos \alpha}{r^2 + r_i^2}$
/ 48	$v =$	como en / 45	
/ 49	$s =$	como en / 46	
/ 50	α	$0 \ldots \alpha_{máx}$	$\alpha_{mín}$: $\tan \alpha_{mín} = \dfrac{f}{r}$
/ 51		$\tan \alpha = \mu_o \dfrac{r^2 + r_i^2}{r_i^2}$	$\alpha_{máx}$: $\tan \alpha_{máx} = \mu_o \dfrac{r^2 + r_i^2 - f\,r}{r_i^2}$



	Cono macizo	Cilindro macizo	Tubo de pared delgada
/ 52	$r_i^2 = \dfrac{2}{5} r^2$	$r_i^2 = \dfrac{r^2}{2}$	$r_i^2 = \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{2} \cong r^2$

α^* Angulo de volteo (centro de gravedad Cg verticalmente sobre la arista de volteo)

μ Coeficiente de fricción dinámica (ver Z 20)

μ_o Coeficiente de fricción estática (ver Z 20)

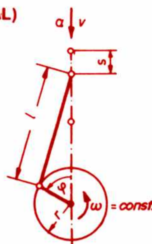
/ 53 ϕ Angulo de fricción dinámica ($\mu = \tan \phi$)

/ 54 ϕ_o Angulo de fricción estática ($\mu_o = \tan \phi_o$)

f Brazo de momento en la fricción dinámica (ver Z 20 y k 70)

r_i Radio de inercia (o de giro)

BIELA Y MANIVELA (O CIGÜEÑAL)



/ 55 $s = r(1 - \cos\phi) + \frac{\lambda}{2} r \operatorname{sen}^2\phi$

/ 56 $v = \omega r \operatorname{sen}\phi\,(1 + \lambda \cos\phi)$

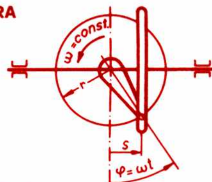
/ 57 $a = \omega^2 r(\cos\phi + \lambda \cos 2\phi)$

/ 58 $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{4} \dots \frac{1}{6}$

/ 59 $\phi = \omega t = 2\pi n t$

(λ es la relación de longitudes de manivela a biela)

MANIVELA Y CORREDERA



/ 60 $s = r \operatorname{sen}(\omega t)$

/ 61 $v = \omega r \cos(\omega t)$

/ 62 $a = -\omega^2 r \operatorname{sen}(\omega t)$

/ 63 $\omega = 2\pi n$

(Movimiento: oscilación armónica)

TRANSMISION DE CARDAN

Con entrada uniforme, la salida es

no uniforme	uniforme, con eje o árbol auxiliar H	
Entrada, Salida		

Si todos los ejes o árboles están en un plano entonces se cumple que:

/ 64 $\tan\phi_2 = \tan\phi_1 \cdot \cos\beta$	$\tan\phi_3 = \tan\phi_1$	$\tan\phi_3 = \tan\phi_1$
/ 65 $\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos\beta}{1 - \operatorname{sen}^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\phi_1}$	$\omega_3 = \omega_1$	$\omega_3 = \omega_1$

/ 66 $$\alpha_2 = \omega_1^2 \frac{\operatorname{sen}^2\beta \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen} 2\phi_1}{(1 - \operatorname{sen}^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\phi_1)^2}$$

Las dos líneas ejes A de las articulaciones del árbol auxiliar deben moverse paralelamente

Cuanto mayor sea el ángulo β de inclinación, tanto mayor será la aceleración máxima α y, asimismo, el momento (o par) acelerante. Por lo que en la práctica debe tomarse $\beta \leqq 45°$.

Dinámica

Conceptos generales

M 1

Definición

La dinámica estudia las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento y los conceptos afines de trabajo, energía y potencia.

Principales cantidades de la dinámica y sus unidades

Masa m (es una cantidad fundamental; ver las Explicaciones generales)

Unidades: g, kg, Mg (=t)

1 kg es la masa de un prototipo internacional. En una balanza común se mide la masa de un cuerpo y no su peso.

Fuerza F y peso G

El vector fuerza es igual al producto de la masa por el vector aceleración. En términos de su magnitud, la fuerza F es igual al producto de la masa m y la aceleración a.

m 1 $$F = ma$$

El peso G es el efecto de la aceleración de la gravedad g sobre la masa m.

m 2 $$G = mg$$

Con una balanza de resorte se mide directamente el peso como una fuerza.

Unidades: N, kgf

1 N es la fuerza que imparte a un cuerpo con una masa de 1 kg (o sea, $1\ N \cdot s^2 \cdot m^{-1}$) una aceleración de $1\ m/s^2$.

1 kgf (= 9.81 N) se define como la fuerza que el campo gravitacional terrestre ejerce sobre una masa de 1 kg en una localización estándar donde $g = 9.81\ m/s^2$.

Trabajo W

El trabajo (mecánico) es el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento. Si la fuerza es constante y se ejerce sobre un cuerpo con movimiento rectilíneo en la dirección de la fuerza. $W = Fs$.

Unidades: joule (J) = N · m = W · s ; kgf·m; kcal; cv · h; hp · h

Si una fuerza de 1 N se ejerce a lo largo de una trayectoria de 1 m, efectúa un trabajo (energía) de 1 N · 1 m = 1 J.

Potencia P

La potencia P es la rapidez de variación del trabajo. Si el trabajo (energía) es uniformemente creciente o decreciente, la potencia será el cociente de trabajo y tiempo ($P = W/t$).

Unidades: watt (W) = J/s; kgf · m/s; kcal/h; cv; hp

1 W es la potencia constante en el tiempo que corresponde a una transformación o transferencia de energía igual a 1 J/s.

$$1\ W = 1\ J/s$$

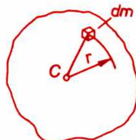
Dinámica

Masa y momento de inercia de masa

M 2

DEFINICION DEL MOMENTO DE INERCIA DE MASA J

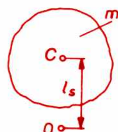
El momento de inercia de la masa de un cuerpo con respecto a un eje que pase por *C* es la suma de los productos de los elementos de masa y el cuadrado de su distancia al eje de rotación *C*.



m 3 $J = \Sigma r^2 \Delta m = \int r^2 \, dm$ kg · m², utm · m²

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos (ver también I 9)

Si el momento de inercia de una masa con respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad *C* es J_c, entonces el momento de inercia *J* con respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por *O*, situado a una distancia l_c, es



m 4 $J = J_c + m l_c^2$ kg · m², utm · m²

Radio de inercia (o radio de giro) r_i

El radio de inercia r_i es el radio de un cilindro ideal infinitesimalmente delgado, en el cual se puede suponer concentrada toda la masa del cuerpo y que tiene el momento de inercia *J* con respecto a su eje.

m 5 $m r_i^2 = J$ de donde $r_i = \sqrt{\dfrac{J}{m}}$ m, cm

Efecto de inercia (o de volante)

m 6 Efecto de inercia $= G d_i^2 = 4 g J$ N · m², kgf · m²

m 7 $d_i^2 = 4 r_i^2$ (Ver fórmulas en M 3)

Masa reducida (para cuerpos que ruedan)

m 8 $m_{red} = \dfrac{J}{r^2}$ kg, utm

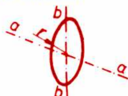
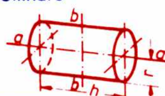
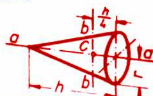
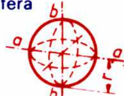
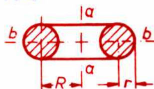
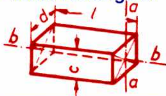
Fórmulas básicas

	Movimiento rectilíneo		Movimiento circular	
	Fórmula	Unidades	Fórmula	Unidades
m 9	$F = m a$	N, kgf	$M = J\alpha$	N · m, kgf · m
m 10	$W = F s$ ($F =$ const.)	J, kgf · m	$W = M \phi$ (M cte.)	J, kgf · m
m 11	$E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$	" "	$E_c = \dfrac{1}{2} J \omega^2$	" "
m 12	$E_p = G h$	" "	$\omega = 2\pi n$ (rps)	rps, rpm
m 13	$E_r = \dfrac{1}{2} F \Delta l$	" "	$E_r = \dfrac{1}{2} M \Delta \beta$	J, kgf · m
m 14	$P = \dfrac{dW}{dt} = F v$	W, kW, cv	$P = \dfrac{dW}{dt} = M \omega$	W, kW, cv

Para los símbolos de las fórmulas ver M 4

Dinámica

Momentos de inercia de masa

	Con respecto al eje *a-a* (de revolución)	Con respecto al eje *b-b* (que pasa por el centro de masa *C*)	Cuerpos
 m 15	$J = m\,r^2$	$J = \frac{1}{2}m\,r^2$	Aro circular 
m 16	$d_i^2 = 4\,r^2$	$d_i^2 = 2\,r^2$	
 m 17	$J = \frac{1}{2}m\,r^2$	$J = \frac{m}{12}(3\,r^2 + h^2)$	Cilindro 
m 18	$d_i^2 = 2\,r^2$	$d_i^2 = \frac{1}{3}(3\,r^2 + h^2)$	
 m 19	$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$J = \frac{m}{12}(3\,R^2 + 3\,r^2 + h^2)$	Cilindro hueco 
m 20	$d_i^2 = 2\,(R^2 + r^2)$	$d_i^2 = \frac{1}{3}(3\,R^2 + 3\,r^2 + h^2)$	
 m 21	$J = \frac{3}{10}m\,r^2$	$J = \frac{3}{80}m(4\,r^2 + h^2)$	Cono 
m 22	$d_i^2 = \frac{6}{5}r^2$	$d_i^2 = \frac{3}{20}(4\,r^2 + h^2)$	
 m 23	$J = \frac{4}{10}m\,r^2$	$J = \frac{4}{10}m\,r^2$	Esfera 
m 24	$d_i^2 = \frac{8}{5}r^2$	$d_i^2 = \frac{8}{5}r^2$	
 m 25	$J = m(R^2 + \frac{3}{4}r^2)$	$J = m\frac{4\,R^2 + 5\,r^2}{8}$	Toro 
m 26	$d_i^2 = 4\,R^2 + 3\,r^2$	$d_i^2 = \frac{1}{2}(4\,R^2 + 5\,r^2)$	
 m 27	$J = \frac{1}{12}m(d^2 + 4\,l^2)$*	$J = \frac{m}{12}(d^2 + c^2)$	Prisma rectangular 
m 28	$d_i^2 = \frac{4}{3}l^2$	$d_i^2 = \frac{1}{3}(d^2 + c^2)$	

*Si $d, c << l$, $J = (m/3)l^2$

Dinámica

Rotación

M 4

Energía cinética total de un cuerpo

m 29 $$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$ J, kgf · m

Energía cinética de un cuerpo que rueda sin resbalar

m 30 $$E_c = \frac{1}{2} (m + m_{red}) v^2$$ J, kgf · m

m 31 $$v = \omega r$$ m/s

Momento de rotación

m 32 $$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n \text{ (rps)}}$$ N·m, kgf · m

$$= 973.4 \frac{P \text{ (kW)}}{n \text{ (rpm)}} \text{ kgf} \cdot \text{m} = 716 \frac{P \text{ (cv)}}{n \text{ (rpm)}} \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

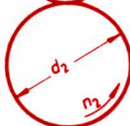
Relaciones de transmisión

Relación de transmisión

m 33 $$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Elemento impulsor





Elemento impulsado

Relación de momentos

m 34 $$\frac{\text{Momento aplicado}}{\text{Momento resistente}} = \frac{M_A}{M_R} = \frac{1}{i\eta}$$

Eficiencia

m 35 $$\eta = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}}$$

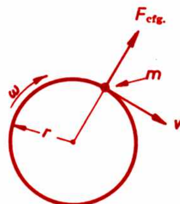
Eficiencia global de varias transmisiones

m 36 $$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots$$

m_{red}	(Ver m 8)	
v	Velocidad del centro de masa (traslación)	m/s
F	Fuerza aplicada	N, kgf
M	Momento de fuerza en rotación	N · m, kgf · m
E_c	Energía cinética	J, kgf · m
E_p	Energía potencial	J, kgf · m
E_r	Energía elástica de un resorte helicoidal	J, kgf · m
Δl	Deformación longitudinal del resorte	m, cm
$\Delta\beta$	Deformación angular de un resorte espiral	rad

FUERZA CENTRIFUGA





m 37 $F_{cfg.} = m\omega^2 r = \dfrac{m\,v^2}{r}$ N, kgf

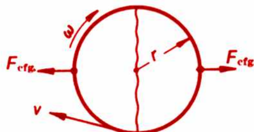
m 38 $= 4\pi^2\, m\, n^2\, r$ N, kgf

m 39 $v = 2\,\pi\, r\, n$ m/s, km/h

m 40 $\omega = 2\,\pi\, n$ rps, rpm

ESFUERZOS POR EFECTO CENTRIFUGO EN CUERPOS ROTATORIOS

Disco



m 41 $\sigma_t = \dfrac{\omega^2\, r^2 \rho}{3} = \dfrac{v^2 \rho}{3}$ N/m², kgf/cm²

Anillo



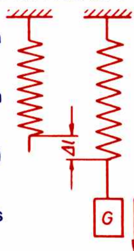
m 42 $\sigma_t = \dfrac{\omega^2 \rho}{3}\,(r_1^2 + r_1\, r_2 + r_2^2)$ N/m², kgf/cm²

l_c	Distancia del centro de gravedad	m, cm, mm
e	Elongación máxima del péndulo	m, cm, mm
f	Elongación del péndulo	m, cm, mm
$F_{cfg.}$	Fuerza centrífuga	N, kgf
J_0	Momento de inercia de masa con respecto a O	kg · m², utm · m²
J_C	Momento de inercia de masa con respecto a C	kg · m², utm · m²
M_1	Momento al girar un resorte espiral un ángulo $\Delta\phi = 1$ rad	N · m, kgf · m
σ_t	Esfuerzo de tensión	N/m², kgf/cm², kgf/mm²
T	Periodo de oscilación (tiempo del movimiento de B a B' y a B)	s, min
v_E	Velocidad en E	m/s, cm/s
v_F	Velocidad en F	m/s, cm/s
E_{cE}	Energía cinética en E	J, kgf · m

OSCILACIONES MECANICAS

(Ver también L 4 y L 7)

Determinación de la constante de carga de un resorte, c



Generalidades



m 43 Periodo $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{c}}$ s, min

m 44 Constante de resorte $c = \dfrac{G}{\Delta l}$ N/m, kgf/cm

m 45 Frecuencia $f = \dfrac{1}{T}$ (ver L 1) c/s (Hz)

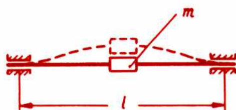
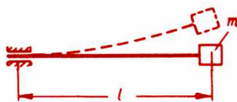
m 46 Frecuencia angular $\omega = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ rad/s

Velocidad crítica (por flexión) de un eje de transmisión, n_k

m 47 $$n_k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_t}{m}}$$

m 48 $$= 300 \sqrt{\frac{c_t\ (\text{kgf/cm})}{m\ (\text{kg})}}\ \text{rpm}$$

Constante de carga elástica c_t para ejes

con 2 soportes	con soporte movible
	

m 49 $c_t = \dfrac{48\,E\,I}{l^3}$ $\qquad$ $c_t = \dfrac{3\,E\,I}{l^3}$

Δl Deflexión, o bien, distensión de un resorte

I Momento de inercia de la sección transversal de un eje (o árbol)

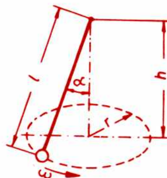
m Masa. Al determinar la velocidad crítica se considera la masa (por ejemplo, la de una polea) concentrada en un punto. La masa del eje o árbol se toma en cuenta aumentando la anterior.

c_t Constante de resorte para oscilaciones elásticas transversales

MOVIMIENTO PENDULAR

(Ver también L 4)

Péndulo cónico (o centrífugo)



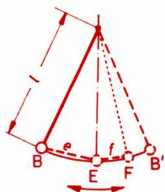
m 50 $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$ s, min

m 51 $\tan\alpha = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r}{h}$

m 52 $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ | $h = \frac{g}{\omega^2}$ m, cm

Péndulo simple

Masa oscilante concentrada en un punto.
Brazo del péndulo con masa cero

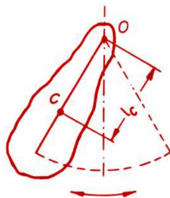


m 53 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ s, min

m 54 $v_E = e\sqrt{\frac{g}{l}}$ $v_F = \sqrt{\frac{g}{l}(e^2 - f^2)}$ m/s

m 55 $E_c = m\,g\,\frac{e^2}{2l}$ J

Péndulo físico



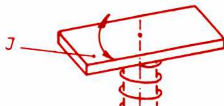
m 56 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{G l_c}}$

m 57 $J_0 = J_c + m l_c^2$ kg · m²

m 58 $J_c = G l_c \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{l_c}{g}\right)$ kg · m²

Si un cuerpo con centro de gravedad en C a una distancia l_c de O, se suspende de O y se pone a oscilar, su periodo de oscilación T se determina experimentalmente, y con la fórmula m 58 se puede calcular su momento de inercia J_c con relación a C.

Péndulo de torsión



m 59 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M_1}}$ s, min

CHOQUE O IMPACTO

Si dos cuerpos con masas m_1 y m_2 y velocidades v_{11} y v_{21} chocan
m 60 entre sí, la cantidad total de movimiento $p = mv$ permanece constante durante el choque (las velocidades cambian a v_{12} y v_{22}):

m 61 $$p = m_1 \cdot v_{11} + m_2 \cdot v_{21} = m_1 \cdot v_{12} + m_2 \cdot v_{22}$$

Tipos de choques

Directo y central	Velocidades paralelas a las normales al área de choque	Las normales pasan por los centros de masa de los cuerpos
Oblicuo y central	Velocidades en direcciones cualesquiera	
Oblicuo y no central		Normales en posiciones cualesquiera

Clases de choques

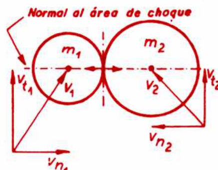
		Elástico*	Plástico
	Velocidades relativas	Son de igual magnitud antes y después del choque	Son nulas después del choque
m 62	Velocidades después del choque si es directo y central	$v_{12} = \dfrac{v_{11}(m_1 - m_2) + 2m_2 \cdot v_{21}}{m_1 + m_2}$	$v_{02} = \dfrac{m_1 \cdot v_{11} + m_2 \cdot v_{21}}{m_1 + m_2}$
m 63		$v_{22} = \dfrac{v_{21}(m_2 - m_1) + 2m_1 \cdot v_{11}}{m_1 + m_2}$	
m 64	Coeficiente de restitución	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0$

Coeficiente de restitución ϵ

Mide en qué grado varían las velocidades relativas antes (v_{r1}) y después del choque (v_{r2}):

m 65 $$\epsilon = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}, \quad \text{donde } 0 \leqq \epsilon \leqq 1$$

*En el choque elástico oblicuo y central, el vector velocidad se descompone en sus componentes normal y tangencial. La componente normal v_n ocasiona un choque directo, pero la componente tangencial v_t no influye en el choque.



Hidráulica

Conceptos generales - Hidrostática

N 1

GENERALIDADES

La hidráulica estudia el comportamiento de los líquidos. Estas sustancias pueden considerarse como incompresibles en la mayor parte de los casos; es decir, sus cambios de densidad, al variar la presión, son despreciables.

Magnitudes

Presión p. Ver O 1

Densidad ρ. Ver O 1

Viscosidad dinámica η. (EU: $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)

La viscosidad dinámica es una característica de los fluidos para la cual se cumple que:

n 1 $$\eta = f(p, t)$$

Con frecuencia puede despreciarse la dependencia de la presión, en cuyo caso

n 2 $$\eta = f(t)$$ (Los valores numéricos) pueden verse en Z 16)

Viscosidad cinemática ν. (EU: m^2/s)

La viscosidad cinemática es la relación entre la viscosidad dinámica η y la densidad ρ:

n 3 $$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

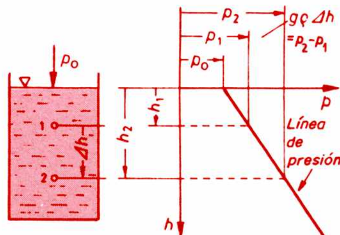
HIDROSTATICA

Distribución de la presión en un líquido

n 4 $$p_1 = p_0 + g\,\rho\,h_1$$

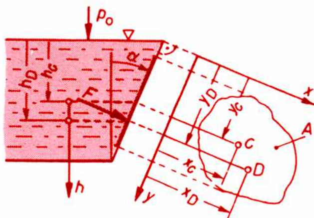
n 5 $$p_2 = p_1 + g\,\rho\,(h_2 - h_1)$$

$$= p_1 + g\,\rho\,\Delta h$$



Presión de un líquido sobre una superficie plana

Por fuerza de presión hidrostática F de un líquido sobre una superficie, se entiende la fuerza que ejerce el líquido exclusivamente, es decir, sin tomar en cuenta la presión p_0.

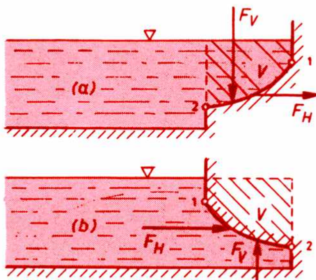


n 6 $$F = g\rho\, y_c\, A \cos\alpha = g\rho\, h_c\, A$$

n 7 $$y_D = \frac{I_x}{y_c A} = y_c + \frac{I_c}{y_c A}; \qquad x_D = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

Presión de un líquido sobre una superficie curva

La fuerza de presión que ejerce un líquido sobre la superficie curva 1-2, se descompone en una componente horizontal F_H y otra vertical F_V. La componente F_V es igual al peso del líquido contenido en el volumen V en (a) o en (b). La línea de acción pasa por el centroide del volumen.



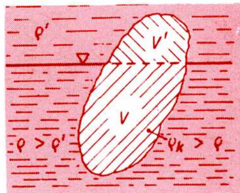
n 8 $$|F_V| = g\rho V \qquad \text{N, kN}$$

La componente F_H es la fuerza debida a la presión del líquido sobre la proyección de la superficie 1-2 sobre el plano perpendicular a F_H. Los cálculos se realizan mediante las relaciones n 6 y n 7.

C Centroide de la superficie A
D Centro de presión (punto de aplicación de F)
I_x Momento de inercia de A con respecto al eje x
I_c Momento de inercia de A con respecto a un eje por C paralelo al eje x (ver I 10 y P 3)
I_{xy} Producto de inercia de A con respecto a los ejes x y y (ver I 10)

EMPUJE ASCENSIONAL

El empuje hidrostático ascensional F_1 es numéricamente igual a la suma de los pesos de los líquidos desplazados por el cuerpo sumergido, y cuyas densidades son ρ y ρ', respectivamente.



n 9 $$F_A = g\,\rho\,V + g\,\rho'\,V'$$

Si el fluido con densidad ρ' es un gas puede considerarse que

n 10 $$F_A \cong g\,\rho\,V$$

Si ρ_c es la densidad del cuerpo sumergido resulta que si:

n 11 $\rho > \rho_c$, el cuerpo flota
n 12 $\rho = \rho_c$, el cuerpo está suspendido
n 13 $\rho < \rho_c$, el cuerpo se hunde

} en el líquido más denso

Determinación de la densidad ρ de cuerpos sólidos y líquidos

Para sólidos con densidad mayor que el líquido empleado	Para sólidos con densidad menor que el líquido empleado	Para líquidos se considera primero F' y m con un cuerpo cualquiera dentro de un líquido de densidad conocida ρ'.
n 14 $\rho = \rho_L \dfrac{1}{1 - \dfrac{F}{m\,g}}$	n 15 $\rho = \rho_L \dfrac{1}{1 + \dfrac{F_a - F}{m\,g}}$	n 16 $\rho = \rho' \dfrac{1 - \dfrac{F}{m\,g}}{1 - \dfrac{F'}{m\,g}}$
m, F, ρ_L	m, F_a, Cuerpo auxiliar, ρ_L	m, F, F', ρ, ρ'

m Masa del cuerpo suspendido en el líquido

F Fuerza de equilibrio

F_a Fuerza de equilibrio en el experimento con el cuerpo auxiliar

ρ_L Densidad del líquido en que se pesa

FLUJO ESTACIONARIO

Teorema de continuidad (Principio de conservación de la masa)

Ecuación de continuidad:

n 17 $$A_1 v_1 \rho_1 = A v \rho = A_2 v_2 \rho_2$$

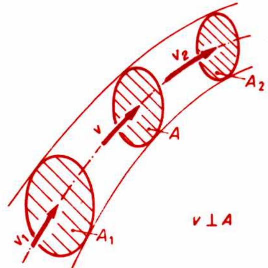
Flujo de masa:

n 18 $$\dot{m} = \dot{V} \rho \qquad \text{kg/s, g/s}$$

Flujo de volumen (gasto):

n 19 $$\dot{V} = A v = \mathcal{Q}$$

m³/s, cm³/s



Teorema de Bernoulli (Principio de conservación de la energía)

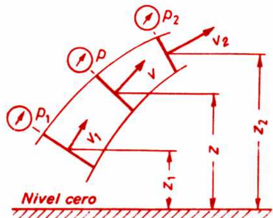
Flujo ideal (sin fricción):

n 20 $$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} \qquad \text{J/kg}$$

$\frac{p}{\rho}$ energía de presión por unidad de masa

$g z$ energía potencial por unidad de masa

$\frac{v^2}{2}$ energía cinética por unidad de masa



Flujo real (en el que hay rozamiento)

n 21 $$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + w_{f\,1,2} \qquad \text{J/kg}$$

$w_{f\,1,2}$ pérdida de energía por fricción desde 1 hasta 2

Potencia de una máquina hidráulica

n 22 $$P = \dot{m}\, w_{c1,2}$$ W, kgf · m/s, cv

Trabajo de conversión por unidad de masa:



n 23 $$w_{c1,2} = \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + g\,(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) - w_{f1,2}$$

n 24 para máquinas generatrices (o impulsoras) $w_{c1,2} > 0$

n 25 para máquinas motrices $w_{c1,2} < 0$

Teorema del momentum (o impetu)

En el caso de un fluido (incompresible) que circula por un "volumen de control" fijo en el espacio se cumple la siguiente ecuación vectorial:

n 26 $$\Sigma \vec{F} = \dot{m}\,(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$ N, kgf

$\Sigma \vec{F}$ son las fuerzas que actúan sobre el fluido en el volumen de control. Pueden ser

fuerzas de volumen (por ejemplo, el peso)

fuerzas de presión

fuerzas de fricción.

$\vec{v_2}$ Velocidad de salida del fluido del volumen de control

$\vec{v_1}$ Velocidad de entrada del fluido al volumen de control

Teorema de la cantidad de momento angular

Sobre un fluido (incompresible) que circula a través de un volumen de control fijo se ejerce el momento rotacional M:



n 27 $$M = \dot{m}\,(v_{2.u}\, r_2 - v_{1.u}\, r_1)$$ N · m, kgf · m

$v_{2.u}$ y $v_{1.u}$ son, respectivamente, las componentes tangenciales de las velocidades de salida y de entrada del fluido en el volumen de control.

r_2 y r_1 son, respectivamente, los radios correspondientes a v_2 y v_1.

PERDIDA DE ENERGIA POR FRICCION EN EL FLUJO A TRAVES DE UN TUBO

n 28 Pérdida de energía por unidad de masa } $w_{f1,2} = \Sigma\left(\zeta a \dfrac{v^2}{2}\right)$, de donde

n 29 Pérdida de presión $\Delta p_v = \rho\, w_{f1,2}$

Determinación del factor de resistencia friccional ζ y del factor de forma a:

Tubos de sección circular	Tubos de sección no circular
n 30 $Re = \dfrac{v\, d\, \rho}{\eta}$	$Re = \dfrac{v\, d_h\, \rho}{\eta}$

n 31 Si $Re < 2320$, el flujo es laminar

n 32 Si $Re > 2320$, el flujo es turbulento

	Flujo		Flujo	
	laminar	turbulento*	laminar	turbulento*
n 33	$\zeta = \dfrac{64}{Re}$	$\zeta = f\left(Re, \dfrac{k}{d}\right)$	$\zeta = \phi \dfrac{64}{Re}$	$\zeta = f\left(Re, \dfrac{k}{d_h}\right)$

n 34 $a = \dfrac{l}{d}$ en tubos rectos | $a = \dfrac{l}{d_h}$ en tubos rectos

n 35 $a = 1$ en conexiones

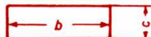
Determinación del factor ϕ



n 36 Para secciones anulares

D/d	1	3	5	7	10	30	50	70	100	∞
ϕ	1.50	1.47	1.44	1.42	1.40	1.32	1.29	1.27	1.25	1.00

n 37 Para secciones rectangulares



c/b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
ϕ	1.50	1.34	1.20	1.10	1.02	0.97	0.94	0.92	0.90	0.89

n 38 d Diámetro interior libre del tubo | l Longitud del tubo

d_h ($= 4\, A/P_M$) Diámetro hidráulico | Re Número de Reynolds

A Sección transversal perpendicular a la dirección del flujo

P_M Perímetro mojado

k/d (y k/d_h) Rugosidad relativa

k Altura media de todas las asperezas (ver Z 16)

* El valor de ζ se obtiene del diagrama en Z 15

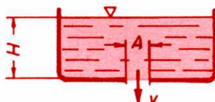
SALIDA DE LIQUIDOS EN RECIPIENTES



Con orificio en el fondo

n 39 $$v = \phi \sqrt{2\,g\,H}$$

n 40 $$\dot{V} = \phi\,\epsilon\,A\,\sqrt{2\,g\,H} = \mathcal{Q}$$





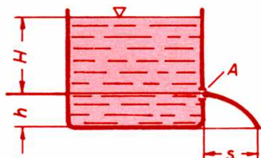
Con orificio lateral pequeño

n 41 $$v = \phi\,\sqrt{2\,g\,H}$$

n 42 $$s = 2\,\sqrt{H\,h}$$

n 43 $$\dot{V} = \phi\,\epsilon\,A\,\sqrt{2\,g\,H} = \mathcal{Q}$$

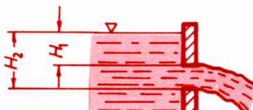
n 44 $$F = \rho\,\dot{V}\,v$$





Con orificio lateral grande

n 45 $$\dot{V} = \frac{2}{3}\,\epsilon\,b\,\sqrt{2\,g}\,(H_2{}^{3/2} - H_1{}^{3/2})$$

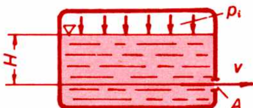




Con presión interior (p_i) sobre la superficie libre

n 46 $$v = \phi\,\sqrt{2\,(g\,H + \frac{p_i}{\rho})}$$

n 47 $$\dot{V} = \phi\,\epsilon\,A\,\sqrt{2\,(g\,H + \frac{p_i}{\rho})}$$

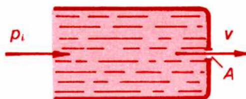




Con presión interior sobre la descarga

n 48 $$v = \phi\,\sqrt{2\,\frac{p_i}{\rho}}$$

n 49 $$\dot{V} = \phi\,\epsilon\,A\,\sqrt{2\,\frac{p_i}{\rho}}$$



v	Velocidad de descarga	m/s
p_i	Presión interior (mayor que la externa)	
ϕ	Coeficiente de fricción del líquido (para el agua $\phi = 0.97$)	
ϵ	Coeficiente de contracción ($\epsilon = 0.62$ para orificios con bordes agudos; $\epsilon = 0.97$ para orificios con bordes redondeados)	
F	Fuerza de reacción	
$\dot{V}$	Flujo volumétrico (gasto, $\mathcal{Q}$)	m³/s, m³/h, lit/min
b	Ancho de orificio	mm, cm

Térmica

Variables termodinámicas de estado

Variables de estado son la presión p, la temperatura absoluta T y la densidad ρ, o bien, el volumen específico v.

Presión p (EU: N/m^2 = Pa, bar, kgf/cm^2)

La presión es la relación de la fuerza F al área de la superficie, A:

O 1 $$p = \frac{F}{A}$$

La presión absoluta de un fluido puede interpretarse como la fuerza total que ejercen las moléculas al chocar contra las paredes del recipiente. La presión p' medida con un manómetro es la diferencia entre la presión absoluta y la presión exterior o atmosférica p_a; cuando $p' > 0$ se denomina "presión efectiva", o simplemente "presión". Si $p' < 0$ se llama entonces "vacío" o "depresión". De ahí se obtiene que la presión absoluta p es:

O 2 $$p = p_a + p'$$

Temperatura T, t (Magnitud básica; ver Explicaciones generales)

La unidad de temperatura absoluta T, el kelvin (o anteriormente, grado Kelvin) K, se define por:

O 3 $$1\,\mathrm{K} = \frac{T_{pt}}{273.16}$$

donde T_{pt} es la temperatura (absoluta) del punto triple del agua pura. Además de la escala Kelvin se emplea también la escala Celsius; la temperatura Celsius t se define internacionalmente como:

O 4 $$t = T - 273.15$$

Densidad ρ (EU: kg/m^3)

La densidad es la relación de la masa m al volumen V:

O 5 $$\rho = \frac{m}{V}$$

Volumen específico v (EU: m^3/kg)

El volumen específico es la relación del volumen V a la masa m:

O 6 $$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Volumen molar V_M (EU: m^3/mol)

El volumen molar es la relación del volumen a la cantidad de sustancia (1 mol) contenida en él:

O 7 $$V_M = \frac{V}{n}$$

Cantidad de sustancia (moles) n (Magnitud básica; ver Explicaciones generales)

CALENTAMIENTO DE SOLIDOS Y LIQUIDOS

Calor Q (EU: J, kcal)

Calor es la energía que se transmite a través de la frontera de sistemas que están a diferente temperatura, cuando se ponen en contacto por medio de paredes *diatérmicas*

Calor por unidad de masa q (EU: J/kg, kcal/kg)

El calor q referido a la unidad de masa es la relación de la cantidad total de calor Q a la masa m del cuerpo considerado.

O 8

$$q = \frac{Q}{m}$$

Calor específico c [EU: J/(kg · K), kcal/(kg · C)]

El calor específico (o capacidad térmica específica) c es el calor Q que hay que suministrar o sustraer de una masa m para cambiar su temperatura en Δt.

O 9

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta t} = \frac{q}{\Delta t}$$

El calor específico es función de la temperatura. (Ver valores numéricos en Z 5 a Z 9.)

Calor de transformación (por unidad de masa) l (EU: J/kg. Valores numéricos en Z 12.)

El calor de transformación (o "latente") es aquel que al ser suministrado o sustraído de un cuerpo cambia su fase sin que cambie la temperatura. Se distinguen los siguientes calores "latentes".

O 10	l_f	(Por unidad de masa)	Calor de fusión	Es el calor necesario para transformar	un cuerpo sólido en uno líquido, a la temperatura de fusión	sin que cambie su temperatura
O 11	l_v		Calor de vaporización		un líquido a la temperatura de vaporización (dependiente de la presión), en vapor saturado	
O 12	l_s		Calor de sublimación		un cuerpo sólido a la temperatura de sublimación (dependiente de la presión) directamente en vapor saturado. (Temperatura inferior a la del punto triple.)	

Térmica

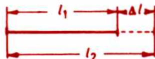
Dilatación de cuerpos sólidos y líquidos

Dilatación térmica de sólidos

Un cuerpo sólido cambia sus dimensiones al variar su temperatura. Utilizando el coeficiente α de dilatación longitudinal (o lineal), que es dependiente de la temperatura (ver sus valores en Z 11), se tiene que:

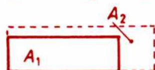
o 13 Longitud: $l_2 = l_1\,[1 + \alpha(t_2 - t_1)]$

o 14 $\Delta l = l_2 - l_1 = l_1\,\alpha(t_2 - t_1)$



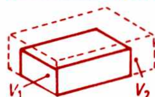
o 15 Area: $A_2 \cong A_1\,[1 + 2\alpha(t_2 - t_1)]$

o 16 $\Delta A = A_2 - A_1 \cong A_1\,2\alpha(t_2 - t_1)$



o 17 Volumen: $V_2 \cong V_1\,[1 + 3\alpha(t_2 - t_1)]$

o 18 $\Delta V = V_2 - V_1 \cong V_1\,3\alpha(t_2 - t_1)$



Dilatación térmica de líquidos

Con β, el coeficiente de dilatación volumétrica (o cúbica) —dependiente también de la temperatura— se tiene:

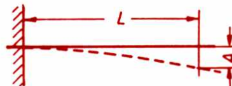
o 19 $V_2 = V_1\,[1 + \beta\,(t_2 - t_1)]$

o 20 $\Delta V = V_2 - V_1 = V_1\,\beta\,(t_2 - t_1)$

Deflexión térmica Δ

Una deflexión térmica se presenta en elementos bimetálicos, los cuales se flexionan por calentamiento hacia la cara donde está el metal con menor coeficiente de dilatación. Designando con δ la "deflexión térmica específica" (pueden verse sus valores en la norma DIN 1715) se obtiene para la deflexión térmica total Δ:

o 21 $$\Delta = \frac{\delta\,L^2\,\Delta t}{s}$$



l_1	Longitud a t_1	A_1	Area a t_1
l_2	Longitud a t_2	A_2	Area a t_2
V_1	Volumen a t_1	t_1	Temperatura inicial
V_2	Volumen a t_2	t_2	Temperatura final
s	Espesor	Δt	Incremento de temperatura

Ecuación de estado para gases ideales

El estado de un gas se determina por dos variables termodinámicas, de manera que la tercera puede calcularse empleando la ecuación de estado. En el caso de gases ideales es válida la ecuación siguiente, en la que la constante de gas R depende del tipo de sustancia (ver Z 12):

o 22 $$p\,v = R\,T \quad \text{o bien,} \quad p\,V = m\,R\,T \quad \text{o bien,} \quad p = \rho\,R\,T$$

Si se refiere la constante del gas a la cantidad de sustancia (1 mol) entonces se cumple para todos los gases ideales, con $R_M = 8314.3$ J/(kmol · K) como constante universal de los gases (ideales), que

o 23 $$pV_M = R_M T$$

Si M es la masa molar (ver Z 12) se tiene:

o 24 $$R_M = M\,R$$

Estado de gases no ideales y vapores

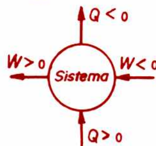
El estado termodinámico de gases reales y vapores se determina empleando ecuaciones o diagramas especiales.

Cambios de estado o procesos

Los cambios de estado en un sistema son inducidos por sus interacciones con el medio que lo rodea. Dichas interacciones se calculan empleando la primera y la segunda leyes de la termodinámica.

	Primera ley en el caso de un sistema cerrado	Primera ley en el caso de un sistema abierto	Segunda ley en el caso de cualquier sistema
o 25 o 26 o 27	$q_{1,2} - w_{1,2} = u_2 - u_1$	$q_{1,2} - w_{c1,2} = h_2 - h_1 + \Delta e$	$q_{1,2} = \int_1^2 T\,ds$

En estas fórmulas se emplean los símbolos con el significado que se indica, y referidos a la unidad de masa.



h	entalpía específica
u	energía interna específica
$w_{1,2}$	trabajo (discontinuo, proceso con cambio de volumen) (ver O 7)
$w_{c1,2}$	trabajo (continuo, proceso en régimen permanente) (ver O 7)
s	entropía específica
Δe	cambios en energía cinética o potencial

Procesos en gases ideales

Las relaciones deducidas de las fórmulas o 25 a o 27 para diferentes cambios de estado se muestran en la tabla de la página O 6. A esta tabla corresponden las siguientes explicaciones. Cada proceso puede representarse en la forma siguiente:

o 28 $$p\,v^n = \text{const.}$$

En la primera columna se indican la magnitud constante y el valor del exponente politrópico n.

Las capacidades térmicas (c_p y c_v) a presión constante y a volumen constante, respectivamente, se consideran por lo general en su valor medio entre las temperaturas t_1 y t_2. Son válidas las siguientes relaciones (los valores de c_p (ó c_{pm}) pueden verse en la página Z 13):

o 29 $$c_p = (c_{pm})_{t_1,\,t_2} = \frac{(c_{pm})_{0,\,t2} \cdot t_2 - (c_{pm})_{0,\,t1} \cdot t_1}{t_2 - t_1}$$

o 30 $$c_v = (c_{vm})_{t_1,\,t_2} = c_p - R$$

o 31 $$k = (k_m)_{t_1,\,t_2} = c_p / c_v$$

El cambio de entropía asociado al cambio de estado está dado por:

o 32 $$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Cambios de estado de gases reales y vapores

La tabla que sigue muestra las relaciones para diversos procesos deducidos de las fórmulas o 25 a o 27. Las variables de estado básicas p, v, T y las variables de estado energéticas u, h, s se relacionan con los diagramas apropiados.

		Cantidades por unidad de masa		
	Proceso (magnitud constante)	Trabajo (discontinuo) $w_{1,2} = \int_1^2 p\,dv$	Trabajo (continuo) $w_{c\,1,2} = -\int_1^2 v\,dp$	Calor $q_{1,2}$
o 33	Isométrico $v = \text{const.}$	0	$v(p_1 - p_2)$	$u_2 - u_1 = (h_2 - h_1) - v(p_2 - p_1)$
o 34	Isobárico $p = \text{const.}$	$p = (v_2 - v_1)$	0	$h_2 - h_1$
o 35	Isotérmico $T = \text{const.}$	$T(s_2 - s_1) - (u_2 - u_1) = T(s_2 - s_1) - (h_2 - h_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1)$	$T(s_2 - s_1) - (h_2 - h_1)$	$T(s_2 - s_1)$
o 36	Isentrópico $s = \text{const.}$	$u_1 - u_2 = (h_1 - h_2) - (p_1 v_1 - p_2 v_2)$	$h_1 - h_2$	0

Térmica

Procesos en gases ideales

Proceso (magn. const.) (expon. (politr.)	Relación entre los estados 1 y 2	Trabajo (p/unid. masa) discontinuo $w_{c1,2} = \int_1^2 p\,dv$	continuo $w_{c1,2} = -\int_1^2 v\,dp$	Calor (p/unid. masa) $q_{1,2}$	Diagrama $p - v$	Diagrama $T - s$
Isométrico $v = \text{const.}$ $n = \infty$ (o 37)	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$	0	$v(p_1 - p_2)$ $= R(T_1 - T_2)$	$c_v\,(T_2 - T_1)$		
Isobárico $p = \text{const.}$ $n = 0$ (o 38)	$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}$	$p(v_2 - v_1)$ $= R(T_2 - T_1)$	0	$c_p\,(T_2 - T_1)$		menos incl. que el isom.
Isotérmico $T = \text{const.}$ $n = 1$ (o 39)	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2}$	$R\,T\,\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ $= R\,T\,\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$	$w_{1,2}$	$w_{1,2}$		
Isentrópico $s = \text{const.}$ $n = k$ (o 40)	$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k$ $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$	$u_2 - u_1 = c_v\,(T_1 - T_2)$ $= \frac{1}{k-1} R\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$	$h_2 - h_1 = c_p\,(T_1 - T_2)$ $= \frac{k}{k-1} R\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$	0	más incl. que el isot.	
Politrópico (cualquiera) $n = \text{const.}$ (o 41)	$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$ $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	$\frac{1}{n-1} R\,(T_1 - T_2)$ $= \frac{1}{n-1} R\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$	$\frac{n}{n-1} R\,(T_1 - T_2)$ $= \frac{n}{n-1} R\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$	$c_v\,\frac{n-k}{n-1}(T_2 - T_1)$	Indefinido	Indefinido

Diagrama $p-v$

En procesos reversibles, el área entre la curva de cambio de estado y el eje v representa el trabajo por variación de volumen o discontinuo (por unidad de masa), y el área entre la curva y el eje p representa el trabajo continuo (por unidad de masa).

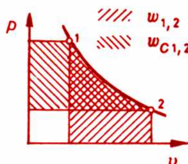
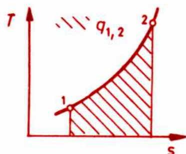


Diagrama $T-s$

En procesos reversibles, el área entre la curva y el eje s representa el calor transmitido (por unidad de masa).



Calor total transmitido

El calor total transmitido (entrante o saliente), una sola vez, entre un sistema cerrado y los alrededores está dado por:

o 42 $$Q_{1,2} = m\,q_{1,2} \qquad \text{J}$$

El calor total transmitido continuamente (flujo de calor) entre un sistema abierto y los alrededores está dado por:

o 43 $$\Phi_{1,2} = \dot{Q}_{1,2} = \dot{m}\,q_{1,2} \qquad \text{W, J/s}$$

donde $\dot{m}$ es el flujo de masa (EU: kg/s).

Trabajo total realizado

El trabajo total realizado (entrante o saliente), una sola vez, entre un sistema cerrado y los alrededores es:

o 44 $$W_{1,2} = m w_{1,2} \qquad \text{J}$$

Potencia

La potencia total suministrada o cedida continuamente entre un sistema abierto y los alrededores es:

o 45 $$P_{1,2} = \dot{m}\,w_{c1,2} \qquad \text{W, J/s}$$

Masa m de una mezcla con componentes $m_1, m_2, \ldots$

o 46 $$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

Proporción o fracción de masa ξ_i en una mezcla

o 47 $$\xi_i = \frac{m_i}{m} \text{ y } \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i = 1$$

Número de moles n en una mezcla con componentes $n_1, n_2, \ldots$

o 48 $$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_n = \sum_{i=1}^{i=n} n_i$$

Proporción o fracción molar ψ_i en una mezcla

o 49 $$\psi_i = \frac{n_i}{n} \text{ y } \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i = 1$$

Masa molar (peso molecular en unidades de masa) aparente M de una mezcla

Para la masa molar se tiene que

o 50 $$M_i = \frac{m_i}{n} \text{ y } M = \frac{m}{n}$$

donde M es la masa molar aparente de la mezcla. El valor de M se calcula como sigue:

o 51 $$M = \sum_{i=1}^{i=n} (M_i \cdot \psi_i) \text{ o bien, } \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\xi_i}{M_i}\right)$$

Cálculo de la fracción de masa a partir de la fracción molar

o 52 $$\xi_i = \frac{M_i}{M} \psi_i$$

Presión total p de la mezcla y presión parcial p_i de cada componente

o 53 $$p = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \text{ de donde } p_i = \psi_i \cdot p$$

Proporción o fracción volumétrica r_i en una mezcla

o 54 $$r_i = \frac{V_i}{V} = \psi_i \text{ y } \sum_{i=1}^{i=n} r_i = 1$$

Se llama volumen parcial V_i al volumen que un solo componente ocuparía a la temperatura T y a la presión total p de la mezcla. Para gases ideales se tiene:

o 55 $$V_i = \frac{m_i R_i T}{p} = \frac{n_i R_M T}{p} \text{ y } \sum_{i=1}^{i=n} V_i = V$$

Variables termodinámicas energéticas de una mezcla

o 56 $$u = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i \cdot u_i); \qquad h = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i \cdot h_i)$$

A partir de estas fórmulas puede determinarse la temperatura de la mezcla. Para gases y vapores reales, de diagramas, y en el caso de gases ideales por las relaciones siguientes:




o 57	Sistema adiabático	cerrado	$t = \dfrac{c_{v1} t_1 m_1 + c_{v2} t_2 m_2 + \ldots + c_{vn} t_n m_n}{c_v \cdot m}$
o 58		abierto	$t = \dfrac{c_{p1} t_1 m_1 + c_{p2} t_2 m_2 + \ldots + c_{pn} t_n m_n}{c_p \cdot m}$

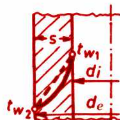
Las capacidades térmicas específicas (medias) de la mezcla se determinan como sigue:

o 59 $$c_v = c_p - R$$

o 60 $$c_p = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i \cdot c_{pi})$$

Debido a la diferencia de temperatura entre dos puntos fluye calor del de mayor temperatura al de menor. Se distinguen las siguientes formas de transmisión de calor:

Conducción térmica (en superficies sólidas)



o 61 en paredes planas: $\Phi = \dot{Q} = \kappa A \dfrac{t_{w1} - t_{w2}}{s}$

o 62 en paredes de tubos: $\Phi = \dot{Q} = \kappa A_m \dfrac{t_{w1} - t_{w2}}{s}$

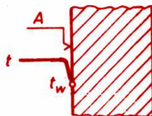
El área media logarítmica es:

o 63 $A_m = \pi d_m L$; por lo tanto $d_m = \dfrac{d_e - d_i}{\ln\left(\dfrac{d_e}{d_i}\right)}$;

- - - en pared plana
—— en tubo
L longitud de tubo

Convección térmica (transmisión en película de fluido)

Esta transmisión consiste en el traspaso de calor de un fluido a una pared sólida o viceversa. Las moléculas, como elementos de masa, transportan la energía debido a su flujo. Si la corriente de fluido se forma por sí sola (como en el ascenso del aire en la atmósfera) se habla de convección libre, en tanto que si el flujo es forzado, la convección se denomina forzada.



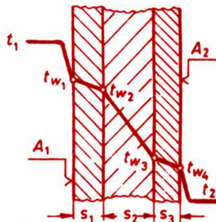
o 64 $\Phi = \dot{Q} = \alpha A \,(t - t_w)$

Radiación térmica

Este tipo de transmisión de calor no está ligado a la presencia de masa (por ejemplo, en la transmisión de calor radiante del Sol a la Tierra a través del vacío). Los cálculos se realizan como en o 64.

Transmisión total de calor

Con esta expresión se designa la totalidad de los procesos que participan en un proceso de transmisión de calor:



o 65 $\Phi = \dot{Q} = UA(t_1 - t_2)$

Considerando el coeficiente total de transmisión de calor U se tiene que (sus valores aproximados se pueden ver en Z 13):

o 66 en paredes planas $\dfrac{1}{U} = \dfrac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\dfrac{s}{\kappa}\right)_i + \dfrac{1}{\alpha_2}$

o 67 en paredes de tubos $\dfrac{1}{UA} = \dfrac{1}{\alpha_1 A_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\dfrac{s}{\kappa A_m}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 A_2}$

κ Conductividad térmica (ver sus valores en Z 5 a Z 10)
α Coeficiente de convección térmica (para su cálculo ver O 12)

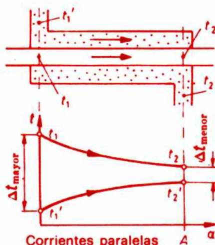
Cambiadores de calor

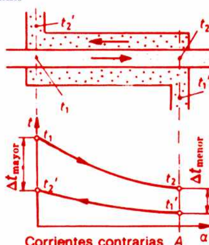
Los cambiadores (o intercambiadores) de calor sirven para efectuar el paso de calor de un fluido a otro. El flujo de calor es:

o 68 $$\Phi = \dot{Q} = k\,A\,\Delta t_m$$

donde Δt_m es la diferencia media logarítmica de temperaturas. En el caso de aparatos con flujos (o corrientes de fluido) en igual sentido, o bien, a contracorriente, se tiene:

o 69 $$\Delta t_m = (\Delta t_{\text{mayor}} - \Delta t_{\text{menor}}) \; : \; \ln \frac{\Delta t_{\text{mayor}}}{\Delta t_{\text{menor}}}$$





En cambiadores que trabajan a contracorriente pueden encontrarse (Δt_{mayor}), o bien (Δt_{menor}), en otros sitios del dispositivo.

Símbolos para las fórmulas de O 12:

A_1	Superficie del cuerpo menor
A_2	Superficie del cuerpo mayor
d	Diámetro interior de tubo
D	Diámetro exterior de tubo
H	Altura de placa
L	Longitud de tubo
C_1, C_2	Constantes de radiación de superficies que intercambian calor por radiación (sus valores pueden verse en Z 14)
K_o	$\cong$ 5.67 $\times 10^{-8}$ W/(m² · K⁴), constante de radiación del cuerpo negro.
Pr	Número de Prandtl, $\text{Pr} = (\eta c_p)/\kappa$ (o 70)
Δt	$= \lvert t_w - t_\infty \rvert$, diferencia de temperaturas entre la pared y el líquido (o el gas), en la región no afectada térmicamente
t_∞	Temperatura del medio no alterado
v	Velocidad
$\eta_{\text{liq.}}$	Viscosidad dinámica a la temperatura media del líquido
η_w	Viscosidad dinámica a la temperatura de la pared
κ	Conductividad térmica del fluido (los valores pueden verse en Z 5 a Z 10)
β	Coeficiente de dilatación volumétrica (ver Z 11 y o 77)
β^*	Factor de temperatura

CALCULO DEL COEFICIENTE DE CONVECCION TERMICA

En convección libre (según Grigull)

O 71	en una placa vertical	$\alpha = \frac{Nu\,\kappa}{H}$	$Nu = 0.55\sqrt[4]{Gr\,Pr}$ si $1700 < Gr\,Pr < 10^8$
O 72			$Nu = 0.13\sqrt[3]{Gr\,Pr}$ si $Gr\,Pr > 10^8$
O 73			$Gr = \frac{g\,\beta\,\Delta t\,H^3}{\nu^2}$ $\nu =$ viscosidad cinemática (η/ρ)
O 74	en un tubo horizontal	$\alpha = \frac{Nu\,\kappa}{D}$	$Nu = 0.41\sqrt[4]{Gr\,Pr}$ si $Gr\,Pr < 10^5$
O 75			$Gr = \frac{g\,\beta\,\Delta t\,D^3}{\nu^2}$

Los valores de los materiales deben referirse a la temperatura de

O 76 referencia $t_R = \frac{t_w + t_\infty}{2}$

En el caso de los gases se cumple para el coeficiente de dilatación:

O 77 $$\beta_{gas} = 1/T_\infty$$

En convección forzada en tuberías (según Hausen)

O 78 $$\alpha = \frac{Nu\,\kappa}{d}$$

O 79	Flujo laminar $Re < 2320$		$Nu = \left[3.65 + \frac{0.0668\left(Re\,Pr\,\frac{d}{L}\right)}{1 + 0.045\left(Re\,Pr\,\frac{d}{L}\right)^{2/3}}\right]\left(\frac{\eta_{liq.}}{\eta_w}\right)^{0.14}$
O 80			si $10^4 > Re\,Pr\,\frac{d}{L} > 10^{-1}$, donde $Re = \frac{v\,d\,\rho}{\eta}$
O 81	Flujo turbulento $Re > 2320$		$Nu = 0.116\,(Re^{2/3} - 125)\,Pr^{1/3}\left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{\eta_{liq.}}{\eta_w}\right)^{0.14}$
			si $2320 < Re < 10^6$; $0.6 < Pr < 500$; $1 < L/d < \infty$

Con excepción de η_w todos los valores de los materiales se refieren a la temperatura media del líquido.
En gases no se emplea el factor $(\eta_{liq.}/\eta_w)^{0.14}$

En la radiación (coeficiente de transmisión por radiación: Γ)

O 82 $$\Gamma = \beta^*\,C_{1,2}$$

O 83	Entre superficies	paralelas	$\beta^* = \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2}$	$C_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{K_0}}$
O 84				
O 85		envolventes		$C_{1,2} \cong \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{K_0}\right)}$

Las explicaciones de los símbolos de las fórmulas se dan en O 11

Resistencia de materiales

Conceptos básicos

GENERALIDADES

Esfuerzo

El *esfuerzo* en un cuerpo con carga es el cociente de la fuerza interna (de tensión, compresión o cortante) y el área considerada en el cuerpo.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$ EU: N/m²; kgf/cm², kgf/mm²

Diagrama esfuerzo-deformación en el caso de acero dúctil

σ_P Límite de proporcionalidad
σ_E Límite de elasticidad
σ_F Esfuerzo de fluencia
σ_{Ft} Lím. de fluencia en tensión
σ_{Fc} Lím. de fluencia en compresión
σ_U Resistencia última
σ_R Esfuerzo de ruptura

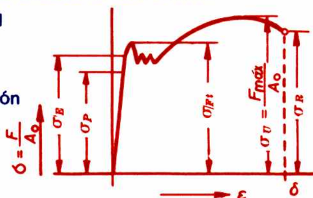


Diagrama para tensión

Esfuerzo permisible $\sigma_{perm.}$

Debe ser inferior al límite de elasticidad. Se determina como sigue:

p 1 $$\sigma_{perm.} = \frac{\sigma_U}{n}$$

σ_U Resistencia última del material
n Factor de seguridad que es siempre mayor que 1. Su magnitud depende del tipo de carga

Clases de carga

Clase	Tipo de variación	Diagrama de variación
I	constante	
II	pulsante	
III	alternante	

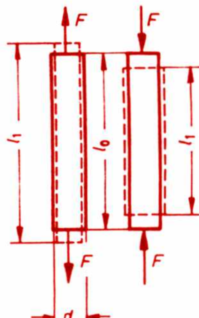
ϵ Deformación (por unidad)
δ Elongación (a la ruptura)
A_0 Area transversal inicial ($\epsilon = 0$)

Tensión y compresión

Esfuerzos de tensión o de compresión σ_t, σ_c

p 2 $$\sigma_t = \frac{F}{A} \leqq \sigma_{t\,(\text{perm.})}$$

p 3 $$\sigma_c = \frac{F}{A} \leqq \sigma_{c\,(\text{perm.})}$$



Tensión Compresión

Módulo de elasticidad (axial) E

p 4 $$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Módulo de deformación (axial) D

p 5 $$D = \frac{1}{E} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Deformación axial total Δl

p 6 $$\Delta l = l_0 D \sigma = l_1 - l_0$$

(ver también o 13 y o 14)

Deformación axial (por tensión o compresión)

p 7 $$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = D \sigma$$

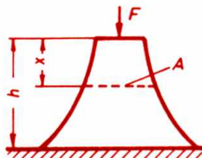
Elongación (a la ruptura) δ

p 8 $$\delta = \frac{\Delta l \cdot 100}{l_0} \% = \frac{\sigma}{E} 100 \% = D \sigma 100 \%$$

δ_5 para $l_0 = 5\,d$, δ_{10} para $l_0 = 10\,d$)

Elemento de compresión de esfuerzo constante (incluyendo su propio peso)

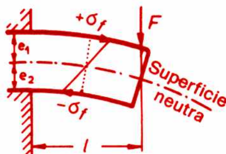
A una distancia cualquiera x desde su parte superior, el área necesaria A se obtiene como sigue:



p 9 $$A = \frac{F}{\sigma_{c\,(\text{perm.})}} \exp\left[\rho g / \sigma_{c\,(\text{perm.})}\right] x$$

$\sigma_{t\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo permisible de tensión (Ver valores en Z 18)
$\sigma_{c\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo permisible de compresión (Ver valores en Z 18)

ACCION FLEXIONANTE



Módulo de sección (resistente) S

p 10 $$S = \frac{I}{e}$$

Esfuerzo por flexión σ_f

p 11 $$\sigma_f = \frac{M\,e}{I} \leqq \sigma_{f\,(\text{perm.})}$$

En caso de que $e = e_1 = e_2$, eje neutro = eje de simetría

p 12 $$\sigma_f = \frac{M}{S}$$

Momento flexionante máximo M

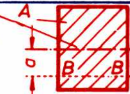
p 13 $$M = F\,l$$

Momentos axiales de inercia de áreas, módulos de sección y esfuerzos máximos por flexión

	Momento de área I	Módulo de sección S	Esfuerzo máximo por flexión $\sigma_{f\,(\text{máx.})}$	Forma de la sección transversal
p 14	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{b\,h^2}{6}$	$\frac{6\,M}{b\,h^2}$	h, b
p 15	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32} \cong \frac{d^3}{10}$	$\cong \frac{10\,M}{d^3}$	d
p 16	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$	$\cong \frac{10\,M\,D}{D^4 - d^4}$	d, D
p 17	$\frac{5\sqrt{3}\,s^4}{144}$	$\frac{5\sqrt{3}\,s^3}{72}$	$\frac{24\sqrt{3}\,M}{5\,s^3}$	s
p 18	$\frac{\pi \alpha^3 b}{4}$	$\frac{\pi \alpha^2 b}{4}$	$\frac{4\,M}{\pi \alpha^2 b}$	a, b

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Eje neutro



p 19 $$I_{BB} = I + Aa^2$$

I_{BB} Momento de inercia con respecto al eje BB

I Momento de inercia con respecto al eje centroidal (neutro) paralelo al eje BB (ver I 11)

e Distancia de la fibra superficial al eje neutro

VIGAS DE SECCION TRANSVERSAL UNIFORME

	Reacciones: Fuerza en A	Reacciones: Fuerza en B	Reacciones: Momento en A	Momento flexionante máximo $M_{máx}$	Deflexión máxima f	Tipo de carga
 p 20	F	—	$F l$	$F l$	$\frac{F l^3}{3 E I}$	l, A, F
 p 21	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	—	$\frac{1}{4} F l$	$\frac{F l^3}{48 E I}$	l, F, A, B
 p 22	$\frac{F b}{l}$	$\frac{F a}{l}$	—	$\frac{F a b}{l}$	$\frac{F a^2 b^2}{3 E I l}$	l, a, b, F, A, B
 p 23	$\frac{11}{16} F$	$\frac{5}{16} F$	$\frac{3}{16} F l$	$\frac{3}{16} F l$	$\frac{7 F l^3}{768 E I}$	l, F, A, B
 p 24	W	—	$\frac{1}{2} W l$	$\frac{1}{2} W l$	$\frac{W l^3}{8 E I}$	l, W, A
 p 25	$\frac{W}{2}$	$\frac{W}{2}$	—	$\frac{1}{8} W l$	$\frac{5 W l^3}{384 E I}$	l, A, W, B
 p 26	$\frac{5}{8} W$	$\frac{3}{8} W$	$\frac{1}{8} W l$	$\frac{1}{8} W l$	$\frac{W l^3}{185 E I}$	l, A, W, B

F Carga concentrada

W Carga uniformemente distribuida ($W = w l$)

VIGAS DE IGUAL RESISTENCIA

	Dimensión máxima de la sección	Ordenada y	Deflexión máxima f	Forma de la viga
p 27	$h = \sqrt{\dfrac{6 F l}{b \sigma_{f\,(\text{perm.})}}}$	$\sqrt{\dfrac{6 F x}{b \sigma_{f\,(\text{perm.})}}}$	$\dfrac{8 F}{b E}\left(\dfrac{l}{h}\right)^3$	
p 28	$b = \dfrac{6 F l}{h^2 \sigma_{f\,(\text{perm.})}}$	$\dfrac{6 F x}{h^2 \sigma_{f\,(\text{perm.})}}$	$\dfrac{6 F}{b E}\left(\dfrac{l}{h}\right)^3$	
p 29	$h = \sqrt{\dfrac{3 W l}{b \sigma_{f\,(\text{perm.})}}}$	$x\sqrt{\dfrac{3 W}{b l \sigma_{f\,(\text{perm.})}}}$	$\dfrac{3 W}{b E}\left(\dfrac{l}{h}\right)^3$	
p 30	$b = \dfrac{3 W l}{h^2 \sigma_{f\,(\text{perm.})}}$	$\dfrac{3 W x^2}{h^2 l \sigma_{f\,(\text{perm.})}}$		
p 31	$h = \sqrt{\dfrac{3 W l}{4 b \sigma_{f\,(\text{perm.})}}}$	$\sqrt{\dfrac{3 W l}{4 b \sigma_{f\,(\text{perm.})}}\left(1 - \dfrac{4 x^2}{l^2}\right)}$	$\dfrac{W l^3}{64 E I}$	

F Carga concentrada

W Carga uniformemente repartida ($W = w l$)

$\sigma_{f\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo permisible por flexión

(Ver Z 18)

ACCION DE CORTE O CIZALLAMIENTO

Esfuerzo cortante

p 32 $$\tau = \frac{F}{A} \leqq \tau_{\text{perm.}}$$

Módulo de elasticidad angular G

p 33 $$G = \frac{\tau}{\gamma} = 0.385\,E$$

Deformación angular (ángulo de deslizamiento)
$\gamma = B\,\tau$

Módulo de deformación angular B

p 34 $$B = \frac{1}{G} = \frac{\gamma}{\tau}$$

Esfuerzo cortante último τ_U

p 35 $$\tau_U = \frac{F_{\text{máx}}}{A} = 0.8\,\sigma_{U(\text{tens.})}$$

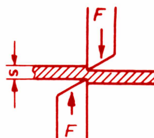
Esfuerzo cortante permisible $\tau_{\text{perm.}}$

Clase de carga (ver P 1)		$\tau_{\text{perm.}} \cong$
	constante	$\sigma_{Ft}/1.5$
	pulsante	$\sigma_{Ft}/2.2$
	alternante	$\sigma_{Ft}/3.0$

Fuerza de corte F

Guillotina o cizalla	Herramienta de corte (punzonado, etc.)
$F \cong 1.7\,\tau_U\,l\,s$	$F \cong 1.7\,\tau_U\,p\,s$

p 36



Esfuerzos cortantes en la práctica

Los esfuerzos de corte se presentan siempre en combinación con los esfuerzos por flexión. En la fórmula p 32, por lo tanto, siempre aparece un coeficiente, de acuerdo con la forma de la sección. (Solamente en vigas muy cortas es posible despreciar los esfuerzos por flexión).

Forma de la sección transversal	(rectangular)	(circular)	(anular)
p 37 Esfuerzo cortante τ	$\frac{3}{2}\frac{F}{A}$	$\frac{4}{3}\frac{F}{A}$	$2\frac{F}{A}$

$\tau_{\text{perm.}}$ Esfuerzo cortante permisible (Ver valores en Z 18)
F Fuerza de corte | $F_{\text{máx}}$ Fuerza máxima o de ruptura
l Longitud de corte | p Perímetro de corte

GENERALIDADES

Esfuerzo de torsión τ_t

p 38 $$\tau_t = \frac{M}{S_t} \leqq \tau_{t\,(\text{perm.})}$$

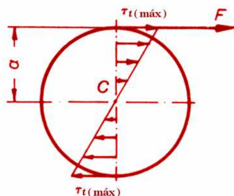
Momento torsionante T

p 39 $$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\,\pi\,n} = F\,a$$

Módulo de sección en torsión S_t

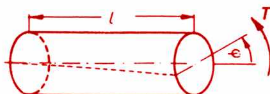
p 40 $$S_t = \frac{I_p}{a}$$

a Distancia entre la fibra extrema y el centroide C



Angulo de torsión

p 41 $$\phi = \frac{T\,l}{I_p\,G}$$



Características de elementos en torsión

	Momento polar de inercia I_p	Módulo polar de sección S_t	Esfuerzo cortante máximo $\tau_{t\,(\text{máx})}$	Forma y dimensiones de la sección
p 42	$\frac{\pi\,d^4}{32}$	$\frac{\pi\,d^3}{16}$	$\cong 5.1\,\frac{T}{d^3}$	C, d
p 43	$\frac{\pi}{32}\,(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$	$\cong 5.1\,\frac{T}{D^3} \cdot \frac{1}{1 - \delta^4}$	C, d, D
p 44 p 45	—	en 1 $\frac{2}{9}\,b\,h^2$ en 2 $\frac{2}{9}\,b^2\,h$	en 1 $\frac{9\,T}{2\,b\,h^2}$ en 2 $\frac{9\,T}{2\,b^2\,h}$	1, 2, C, h, b

Tabla de valores de δ para secciones anulares

	$\delta = \frac{d}{D}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
p 46	$\frac{1}{1 - \delta^4}$	1.0667	1.1489	1.3159	1.6194	2.9136	5.3908

$\tau_{t\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo cortante permisible en torsión (Ver valores en Z 18)

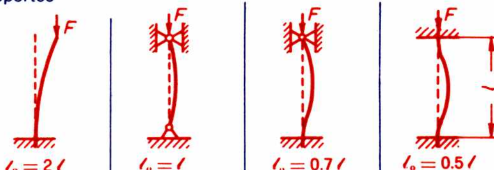
P Potencia transmitida por rotación

Resistencia de materiales

Pandeo de columnas

P 8

Tipos de soportes



p 47

Dimensionamiento preliminar

Primero se supone que para el caso de pandeo es aplicable la fórmula de Euler y se calcula el momento de inercia del área transversal:

p 48

$$I = \frac{F l_0^2 \, n_E}{\pi^2 E}$$

Después se determina la forma de la sección y las dimensiones provisionales según P 3.

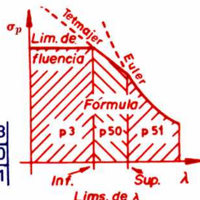
p 49

Dimensionamiento final

Relación de esbeltez $\lambda = l_0 \sqrt{\frac{A}{I}}$

Esfuerzo por pandeo. Se obtiene el límite de la siguiente tabla:

Si λ está	abajo de	los límites se calcula σ, o bien, σ_p por la fórmula	p 3
	entre		p 50
	arriba de		p 51



p 50

Fórmula de Tetmajer: $\sigma_p = a - b\lambda + c\lambda^2 = \sigma_{c(\text{perm.})} n_T \geqq \frac{F}{A} n_T$

Material		a	b	c	Límites de λ
		N/mm²			
Acero	St 37	289	0.818	0	60 — 100
Acero	St 52	589	3.818	0	60 — 100
Hierro fundido	GG 14	776	12.000	0.054	5 — 80
Madera (pino)		30	0.20	0	2 — 100
Madera (encino)		37	0.25	0	0 — 100

p 51

Fórmula de Euler: $\sigma_p = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2 A} = \sigma_{c(\text{perm.})} n_E \geqq \frac{F}{A} n_E$

En caso de que $\sigma_p < \frac{F}{A} n$, repetir el dimensionamiento final con medidas más grandes.

σ_p	Esfuerzo efectivo por pandeo	F	Carga efectiva
$\sigma_{c(\text{perm.})}$	Esfuerzo permisible de compresión		(Ver valores en Z 18)
n_T	Factor de seguridad (intervalo de Tetmajer):		3 — 5
n_E	Factor de seguridad (intervalo de Euler)		
	para máquinas pequeñas:		6 — 8
	para máquinas grandes:		4 — 6

COMBINACION DE ESFUERZOS NORMALES

Por el principio de superposición, los esfuerzos normales *axial* y *por flexión* se suman algebraicamente para obtener el esfuerzo resultante. Los esfuerzos de tensión son *positivos* y los de *compresión*, negativos.

Punto de esfuerzo	Esfuerzo resultante σ_{total} Tensión y flexión	Compresión y flexión
	A_1, A_2, A, e_1, e_2, l, F, F_f, F_t, α	A_1, A_2, A, e_1, e_2, l, F, F_f, F_c, α
p 52 A_1	$+\frac{F_t}{A} - \frac{F_f\, l\, e_1}{I} \leqq \sigma_{t\,(perm.)}$	$-\frac{F_c}{A} + \frac{F_f\, l\, e_1}{I} \leqq \sigma_{c\,(perm.)}$
p 53 A_2	$+\frac{F_t}{A} + \frac{F_f\, l\, e_2}{I} \leqq \sigma_{t\,(perm.)}$	$-\frac{F_c}{A} - \frac{F_f\, l\, e_2}{I} \leqq \sigma_{c\,(perm.)}$

p 54 $F_t = F \cos \alpha$ $F_f = F \operatorname{sen} \alpha$ $F_c = F \cos \alpha$

Por desplazamiento del eje neutro, o sea, variando la sección transversal, pueden obtenerse en A_1 y A_2 esfuerzos de tensión o de compresión de igual magnitud (es decir, con $e_1 \neq e_2$). En el caso de barras largas conviene revisar por pandeo.

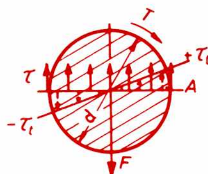
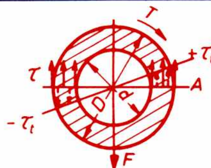
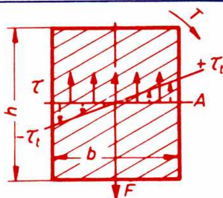
Sección límite (núcleo central) para esfuerzos de igual naturaleza

Si actúa una fuerza axial (tensión o compresión) dentro del área del núcleo central (marcada con puntos), habrá en toda la sección transversal un esfuerzo de la misma clase (tensión o compresión). De otra manera se producirán simultáneamente esfuerzos por flexión, esto es, de tensión y de compresión.

p 55 $x = \frac{a}{6}$ $u = \frac{b}{6}$; $v = \frac{h}{6}$ $r = \frac{d}{8}$ $r = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$

COMBINACION DE ESFUERZOS CORTANTES

Por el principio de superposición, los esfuerzos tangenciales *de corte directo* y *por torsión* se suman algebraicamente para obtener el esfuerzo resultante.

	Esfuerzo resultante τ_{total} en el punto *A*	Distribución en la sección
 p 56	$$\frac{5.1\,T}{d^3} + \frac{1.7\,F}{d^2} \leqq \tau_{t\,(perm.)}$$	
 p 57	$$\frac{5.1\,T\,D}{D^4 - d^4} + \frac{2.55\,F}{D^2 - d^2} \leqq \tau_{t\,(perm.)}$$	
 p 58	$$\frac{4.5\,T}{b^2\,h} + \frac{1.5\,F}{b\,h} \leqq \tau_{t\,(perm.)}$$	

$\tau_{t\,(perm.)}$ Esfuerzo cortante permisible (Ver Z 18)
τ Esfuerzo cortante directo
τ_t Esfuerzo cortante por torsión
T Momento torsionante
F Fuerza de corte directo

COMBINACION DE ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

Cuando se presentan simultáneamente esfuerzos normales y tangenciales se determinan para los cálculos

el esfuerzo equivalente σ_e

o el momento equivalente M_e

El primero (llamado también esfuerzo ideal por flexión) es aquel esfuerzo flexional que produce el mismo efecto —por ejemplo, ruptura— que los dos esfuerzos aplicados, es decir, por flexión y torsión combinadas. Para el momento equivalente es válido el mismo comentario.

Ejes o árboles

p 59 Esfuerzo equivalente $\sigma_e \leqq \sigma_{f(\text{perm.})}$

p 60 $$\sigma_e = \overset{(\text{perm.})}{\sqrt{\sigma_f^2 + 3(\alpha_0\, \tau_t)^2}}$$

p 61 Momento equivalente $M_e = \sqrt{M_f^2 + 0.75\,(\alpha_0\, M)^2}$

Para el dimensionamiento de elementos estructurales debe calcularse primero el módulo resistente de la sección:

p 62 $$S = \frac{M_e}{\sigma_{f(\text{perm.})}}$$

Después de la selección de la sección transversal se obtienen las dimensiones según P 3.

σ_f Esfuerzo real por flexión

τ_t Esfuerzo real por torsión

M Momento flexionante real

T Momento torsionante real

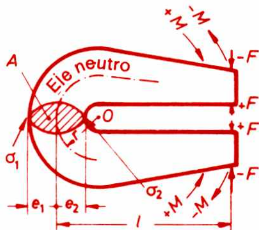
α_0 Relación de esfuerzos, donde

$\alpha_0 \cong 1$ en casos en que la torsión y la flexión correspondan al mismo tipo de carga

$\alpha_0 \cong 0.7$ cuando la torsión es constante o pulsante y la flexión es alternante.

ESFUERZOS EN UNA BARRA EN HERRADURA

En esta barra curva, la sección de máximo esfuerzo es la *A*, en el caso de las cargas *F* indicadas; los momentos *M* son los debidos a dichas cargas *F*. Los esfuerzos en la superficie σ_1 y σ_2 se calculan con las fórmulas p 63 y p 64. Dependiendo de las direcciones los valores de *F* y *M* se considerarán positivos o negativos.



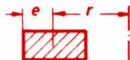


p 63 $$\sigma_1 = \frac{F}{A} + \frac{M}{A\,r} + \frac{M\,r}{\kappa} \cdot \frac{e_1}{r + e_1} \leqq \sigma_{t\,(\text{perm.})}$$

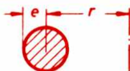
p 64 $$\sigma_2 = \frac{F}{A} + \frac{M}{A\,r} - \frac{M\,r}{\kappa} \cdot \frac{e_2}{r - e_2} \leqq \sigma_{t\,(\text{perm.})}$$

Fórmulas para calcular κ:

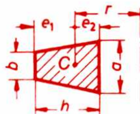
p 65 $$\kappa = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \dots$$



p 66 $$\kappa = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \dots$$



p 67 $$\kappa = \frac{2\,r}{(a+b)\,h}\left\{\left[b + \frac{a-b}{h}(r+e_1)\right] \cdot \ln\frac{r+e_1}{r-e_2} - (a-b)\right\} - 1$$



(Para la ubicación del centroide *C*, ver la sección K 7)

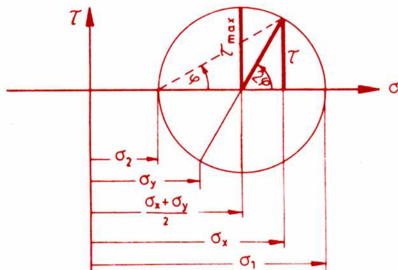
Valores calculados de κ

	$\frac{e}{r}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95
p 69	κ (rectángulo)	0.0033	0.0317	0.0986	0.239	0.373	0.636	0.928
p 70	κ (círculo)	0.0025	0.0236	0.0718	0.167	0.250	0.393	0.524

(p 68: fila de e/r)

$M = F \cdot l$; $\sigma_{t\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo permisible de tensión (ver valores en Z 18)

CIRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS



Esfuerzos principales

p 71 $$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Esfuerzo cortante máximo

p 72 $$\tau_{máx} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Orientación de los planos principales*

p 73 $$\tan 2\phi = \frac{2\,\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Se debe tener siempre que $2\phi < 90°$

Orientación del plano del esfuerzo $\tau_{máx}$

p 74 $$\cot 2\phi = \frac{2\,\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

Los esfuerzos cortantes *son nulos* en los planos principales (donde se presentan los esfuerzos σ_1 y σ_2).

Los esfuerzos cortantes máximos se presentan en planos a 45° con respecto a los planos principales.

*La solución da dos ángulos, uno para σ_1 y otro para σ_2. Los esfuerzos principales y los cortantes máximos se producen, respectivamente, en planos perpendiculares entre sí.

Elementos de máquinas — Q 1

Engranes cilíndricos rectos

DIENTES CON PERFIL DE EVOLVENTE (O INVOLUTA)

Cálculo por resistencia. Dimensiones básicas

q 1 Paso $t = \sqrt[3]{\dfrac{30\,\pi\,T}{\sigma_{f(\text{perm.})}\,\beta\,z}} = \sqrt[3]{\dfrac{15\,P}{\sigma_{f(\text{perm.})}\,\beta\,n}}$

q 2 $= 407\sqrt[3]{\dfrac{P}{\sigma_{f(\text{perm.})}\,\beta\,z\,n}}$ (mm)

[P en cv; $\sigma_{f(\text{perm.})}$ en kgf/mm²; n en rpm]

q 3 Ancho axial $b = \beta\,t$

Dimensiones principales de un engranaje de dos elementos

q 4 Paso $t = m\,\pi = \dfrac{\pi\,d}{z}$

q 5 Módulo $m = \dfrac{t}{\pi} = \dfrac{d}{z}$

q 6 Diám. de paso $d = m\,z$

q 7 Altura de diente $h = 2.166\,m$

q 8 Adendo $h_a = m$

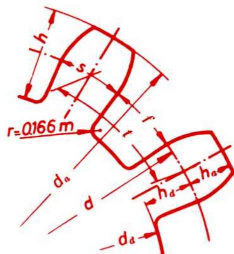
q 9 Dedendo $h_d = 1.166\,m$

q 10 Diám. de adendo $d_a = m(z + 2)$

q 11 Diám. de dedendo $d_d = m(z - \dfrac{7}{3})$

q 12 Dist. entre ejes $a = m\,\dfrac{z_1 + z_2}{2}$

q 13 Grueso de diente $s = 0.4875\,t$ Espacio entre dientes $f = 0.5125\,t$



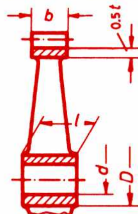
q 14 Diám. del eje (o árbol) $d = \sqrt[3]{\dfrac{5.1\,M}{\tau_{t(\text{perm.})}}}$

q 15 Diám. ext. del cubo $D = 1.8\,d + 20$ mm

q 16 Largo del cubo (o mamelón) $l \geqq 1.5\,d$

q 17 Número de brazos $i = 0.166\,\sqrt{m\,z}$

q 18 Grueso de la corona $0.5\,t$



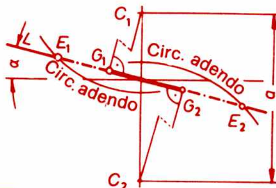
z	Número de dientes	T Momento de rotación (ver P 7)
$\tau_{t(\text{perm.})}$	Esfuerzo cortante permisible por torsión	(ver valores en Z 18)
β	Factor de diseño:	para dientes sin acabado, 2 — 2.5
		para dientes con acabado, 2.5 — 3
		para dientes pulidos, 3 — 5

ENGRANAJES DE EVOLVENTE DE DOS ELEMENTOS

Angulo de presión α / Núm. mínimo de dientes	Procesado con herramienta especial		Procesado sin interferencia	
	15°	20°	15°	20°
q 19 en un engrane	14	11	20	13
q 20 en el par de engranes	38	27	50	30

Estudio por interferencia

Como los puntos de contacto E_1 y E_2 quedan fuera de los puntos de tangencia G_1 y G_2, existe interferencia, la cual puede evitarse con el uso de dientes en V.



Relación de contacto ε

q 21 $$\epsilon = \frac{\text{Distancia de acción}}{\text{Paso reducido}} = \frac{\overline{E_1 E_2}}{t \text{ sen } (90° - \alpha)} > 1$$

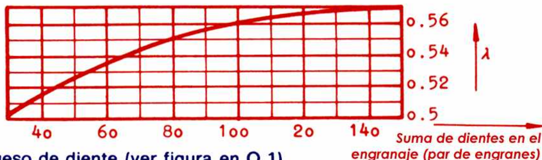
Dientes en V según Fölmer

Se obtienen con herramientas normales para $\alpha = 15°$

Límites de los números de dientes: $z_1 \geqq 8$ y $z_2 \geqq 26$

	Dimensiones de Piñón, z_1	Dimensiones de Rueda, z_2
q 22 Diám. circ. adendo	$d_{a1} = (z_1 + 3)\, m$	$d_{a2} = (z_2 + 1.8)\, m$
q 23 Diám. circ. dedendo	$d_{d1} = (z_1 - 1.134)\, m$	$d_{d2} = (z_2 - 2.334)\, m$
q 24 Grueso de diente	$s_1 = 1.89\, m$	$s_2 = 1.57\, m$

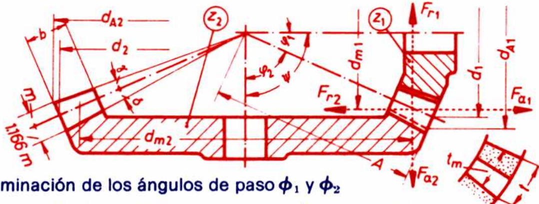
q 25 Dist. entre ejes $$a = \left(\frac{z_1 + z_2}{2} + \lambda\right) m$$



s Grueso de diente (ver figura en Q 1)

Engranes cónicos rectos

ENGRANAJE CONICO DE DOS ELEMENTOS



Determinación de los ángulos de paso ϕ_1 y ϕ_2

		Piñón z_1	Rueda z_2
q 26	$\psi \gtrless 90°$	$\cot \phi_1 = \dfrac{\dfrac{z_2}{z_1} + \cos\psi}{\operatorname{sen}\psi}$	$\cot \phi_2 = \dfrac{\dfrac{z_1}{z_2} + \cos\psi}{\operatorname{sen}\psi}$
q 27	$\psi = 90°$	$\cot \phi_1 = \dfrac{z_2}{z_1}$	$\cot \phi_2 = \dfrac{z_1}{z_2}$

Dimensiones de los dientes

q 28 El ángulo de adendo γ se obtiene de $\tan\gamma = \dfrac{m}{A}$

q 29 El ángulo de dedendo δ se obtiene de $\tan\delta = \dfrac{1.166\, m}{A}$

q 30 Longitud de cono $A = \dfrac{z_1 m}{2 \operatorname{sen}\phi_1} = \dfrac{z_2 m}{2 \operatorname{sen}\phi_2}$

		Dimensiones medias	Dimensiones exteriores
q 31	Paso	$t_m =$ Como las fórmulas para t en Q 1, q 10	$t = t_m + \dfrac{b \operatorname{sen}\phi}{z}\pi$
q 32	Módulo	$m_m = \dfrac{t_m}{\pi}$	$m = m_m + \dfrac{b \operatorname{sen}\phi}{z}$
q 33	Ancho de diente	$b_m = \beta\, t_m$	$b = \beta\, t$
q 34	Diám. circ. paso	$d_m = d - b \operatorname{sen}\phi$	$d = m\, z$

Fuerza axial y radial

q 35 Fuerza axial $F_a = F \tan\alpha \cdot \operatorname{sen}\phi$

q 36 Fuerza radial $F_r = F \tan\alpha \cdot \cos\phi$

q 37 Fuerza sobre los flancos $F = \dfrac{2\pi T}{t_m\, z}$

α Angulo de presión (ver Q 2)

Los demás símbolos pueden verse en Q 1

SISTEMA DE SINFIN Y RUEDA

Relación de transmisión

q 38 $$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\text{Número de dientes de la rueda}}{\text{Número de filetes del sinfín}}$$

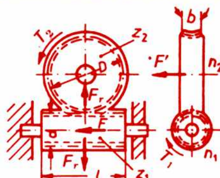
Cálculo del sinfín (o gusano) por resistencia

q 39 Paso $$t = 407 \sqrt[3]{\frac{P}{\sigma_{f(\text{perm.})}\, n_1\, \psi\, z_1}}$$

[P en cv, $\sigma_{f(\text{perm.})}$ en kgf/mm², n_1 en rpm, t en mm]

q 40 $$= \sqrt[3]{\frac{30\,\pi T_1}{\sigma_{f(\text{perm.})}\, \psi\, z_1}}$$

p 41 $$= \sqrt[3]{\frac{15\,P}{n_1\, \sigma_{f(\text{perm.})}\, \psi\, z_1}}$$



q 42 Arco en la rueda $b = \psi\, t$

Dimensiones del sinfín y la rueda

		Sinfín (o gusano)	Rueda (o corona)
q 43	Módulo	—	$m = \frac{t}{\pi} = \frac{D}{z_2}$
q 44	Diám. de paso	$d = 2\kappa m$	$D = m z_2$
q 45	Diám exterior	$d_e = d + 2m$	$D_e = m(z_2 + 2)$
q 46	Diám. de fondo	$d_f = d - 2.33\, m$	$D_f = m(z_2 - 2.33)$
q 47	Longitud	$l = 2m(\sqrt{z_2} + 1)$	
q 48	Fuerza axial	$F = 2\,T_2/D_t$	$F' = F \tan(\beta + \phi')$
q 49	Fuerza radial	$F_r = F \tan \alpha_o$	
q 50	Eficiencia	$^*\eta_1 = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta + \phi')}$	$^*\eta_2 = \frac{\tan(\beta - \phi')}{\tan\beta}$

q 51 Factor κ para el caso más favorable de conexión

q 52 Número de filetes z_1	1	2	3	4
q 53 Factor κ	3.4	4.2	4.8	5.3



q 54 Condición de autoafianzamiento $\tan\beta \leq \mu'$

q 55 β Angulo de avance (se obtiene de $\tan\beta = \frac{z_1}{2\kappa}$)

q 56 ϕ Angulo de fricción deslizante ($\tan\phi = \mu$)

q 57 μ Coef. de fricción deslizante (ver valores en Z 20)

q 58 μ' Coef. de fricción total ($\mu' \cong 1.034\,\mu = \tan\phi'$)

q 59 ψ Para hierro fundido, bronce fosforado, aluminio: 2.5

$^*\eta_1$, si el elemento impulsor es el sinfín

$^*\eta_2$, si el elemento impulsor es la corona

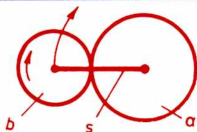
Para los símbolos restantes de las fórmulas ver Q 1

TRENES DE ENGRANES PLANETARIOS CON DOS O MAS ELEMENTOS
RELACIONES DE VELOCIDADES

q 60 $n_a = 0$ (*a* es fijo)

q 61 $n_s = 1$

q 62 $n_b = 1 + \dfrac{a}{b}$



q 63 $n_a = 0$ (*a* es fijo)

q 64 $n_s = 1$

q 65 $n_b = 1 - \dfrac{a}{b}$

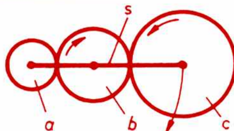


q 66 $n_a = 0$ (*a* es fijo)

q 67 $n_s = 1$

q 68 $n_b = 1 - \dfrac{a}{b}$

q 69 $n_c = 1 + \dfrac{a}{c}$

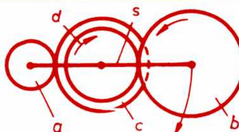


q 70 $n_a = 0$ (*a* es fijo)

q 71 $n_s = 1$

q 72 $n_c = n_d = 1 + \dfrac{a}{c}$

q 73 $n_b = 1 - \dfrac{a\,d}{c\,b}$

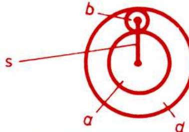


q 74 $n_a = 0$ (*a* es fijo)

q 75 $n_s = 1$

q 76 $n_d = 1 + \dfrac{a}{d}$

q 77 $n_b = 1 + \dfrac{a}{b}$



q 78 $n_d = 0$ (*d* es fijo)

q 79 $n_s = 1$

q 80 $n_a = 1 + \dfrac{d}{a}$

q 81 $n_b = 1 - \dfrac{d}{b}$

$n_d = 0$ (*d* es fijo)

$n_a = 1$

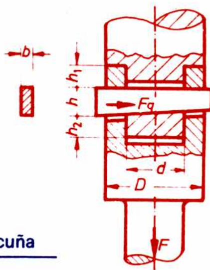
$n_b = \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{b-d}{a+d}\right)$

$n_s = \dfrac{a}{a+d}$

UNION DE CUÑA TRANSVERSAL

Margen de seguridad para la fuerza F

Debido al esforzamiento adicional en la cuña cuando se aprieta en su alojamiento, en las fórmulas se ha considerado un aumento de 25%.



Cálculo por aplastamiento o presión p

Presión de contacto entre

Barra de tracción y cuña	Ojo de paso y cuña
$p = \frac{1.25\,F}{b\,d} \leqq \sigma_{a\,(perm.)}$	$p' = \frac{1.25\,F}{b(D-d)} \leqq \sigma_{a\,(perm.)}$

q 82

Cálculo por flexión

q 83 $$h = 0.87\sqrt{\frac{0.625\,F(D+d)}{b\,\sigma_{f\,(perm.)}}}$$

q 84 $$h_1 = h_2 = (0.5 \text{ a } 0.75)\,h$$

Cálculo por cortante

q 85 $$\tau = \frac{1.5\,F}{b\,h} \leqq \tau_{perm.}$$

Fuerza F_q para introducir la cuña
(Para el cálculo vea K 8)

UNION POR TORNILLOS

Diámetro del núcleo de la barra roscada, d_n

después del apriete	durante el apriete
$d_n = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi\,\sigma_{t\,(perm.)}}}$	$d_n = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi\,(0.75)\,\sigma_{t\,(perm.)}}}$

q 86

F — Fuerza de tracción o carga a transmitir

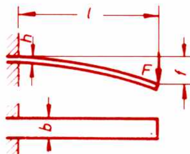
$\sigma_{a\,(perm.)}$, $\sigma_{t\,(perm.)}$, $\tau_{(perm.)}$ — Esfuerzos permisibles (ver Z 18)

RESORTE O MUELLE DE HOJA RECTA

Sin carga y deflexión iniciales (carga F)



q 87 Deflexión máx. perm. $f_{máx} = \dfrac{2 l^2 \sigma_{f(perm.)}}{3 h E}$

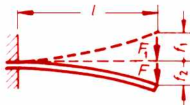


q 88 Carga máx. perm. $F_{máx} = \dfrac{b h^2 \sigma_{f(perm.)}}{6 l}$

q 89 Deflexión $f = \dfrac{4 l^3 F}{b h^3 E}$

Con carga y deflexión iniciales (F_1, f_1)

Para $f_{máx}$, $F_{máx}$ y f son válidas las mismas fórmulas que antes. Además,



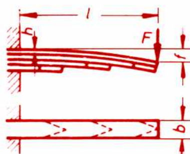
q 90 Deflexión $f = f_1 + f_2 = f_2 \dfrac{F}{F - F_1}$

q 91 Deflexión inicial (levantamiento) $f_1 = f_2 \dfrac{F_1}{F - F_1}$

Muelle de hojas rectas apiladas



q 92 Deflexión máx. perm. $f_{máx} = \dfrac{l^2 \sigma_{f(perm.)}}{h E}$



q 93 Carga máx. perm. $F_{máx} = \dfrac{N b h^2 \sigma_{f(perm.)}}{6 l}$

q 94 Deflexión $f = \dfrac{6 l^3 F}{b h^3 N E}$

Para la forma teórica de una hoja ver p 20 y p 28

Resorte helicoidal de torsión
(El ángulo de torsión α se debe expresar en grados)



q 95 Torsión máx. perm. $\alpha_{máx} = \dfrac{(57.3)\, l\, S_f\, \sigma_{f(perm.)}}{I E}$

q 96 Carga máx. perm. $F_{máx} = \dfrac{S_f\, \sigma_{f(perm.)}}{a}$



q 97 Torsión (desplaz. angular) $\alpha = \dfrac{(57.3)\, F a l}{I E}$

q 98 Longitud de una espira $l = \dfrac{\alpha I E}{(57.3)\, F a}$

Ver en Q 8 la explicación de los símbolos

RESORTE ESPIRAL (ANGULO α EN GRADOS)



q 99 Desplazam. ang. perm. $\alpha_{máx} = \dfrac{114.6\, l\, \sigma_{f(perm.)}}{h\, E}$



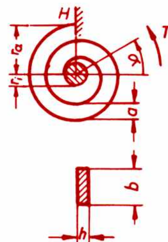
q 100 Mom. de torsión perm. $T_{máx} = \dfrac{b\, h^2}{6}\sigma_{f(perm.)}$



q 101 Desplazam. angular $\alpha = \dfrac{687.6\, T\, l}{E\, b\, h^3}$



q 102 Momento de torsión $T = \dfrac{\alpha E\, b\, h^3}{687.6\, l}$



q 103 Empotramiento en H $F_1 = \dfrac{T}{r_e}$

q 104 Articulación en H $F_1 = \dfrac{T}{2\, r_e}$

q 105 Distancia entre espiras $a = \dfrac{(r_e^2 - r_i^2)\pi}{l}$

q 106 Número de espiras $N = \dfrac{l}{\text{longitud media de espira}}$

Resorte de impulso

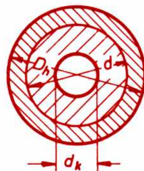
En general, se supone conocido el diámetro interior D_h de la caja del resorte y se corrige después según los resultados de los cálculos.



q 107 Diámetro del núcleo $d_k \cong \dfrac{D_h}{3}$

q 108 Grueso del resorte $h \cong \dfrac{D_h}{100}$

(redondear h a valores normalizados)



q 109 Longitud del elemento $l = N_1\, \pi \dfrac{D_h + d}{2}$

q 110 Número de vueltas $n_{máx} = N_2 - N_1$



	Estado del resorte	Número de espiras	Momento de la fuerza*
q 111	Suelto	$N_1 = \dfrac{D_h - d}{2\, h}$	$T_{mín} \cong \dfrac{E\, b\, h^3\, \pi}{6\, l}\, 3$
q 112	Esforzado	$N_2 = \dfrac{d - d_h}{2\, h}$	$T_{máx} \cong \dfrac{E\, b\, h^3\, \pi}{6\, l}(N_2 - N_1 + 3)$

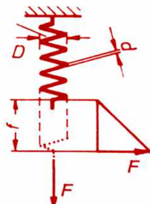
*Descontar de 10% a 30% por fricción

F Empuje de trabajo
T Momento de la fuerza
S_f Módulo de sección

$\sigma_{f(perm.)}$ Esfuerzo permisible por flexión (ver Z 19)
E Módulo de elasticidad (ver Z 19)

RESORTES HELICOIDALES DE TENSION O COMPRESION

Sin deformación inicial



q 113 Relación entre diámetros $D_m \geqq D - d \geqq 6\,d$

q 114 Calibre del alambre $d = \sqrt[3]{\dfrac{F\,8\,D_m}{\pi\,\tau_{t\,(\text{perm.})}}}$

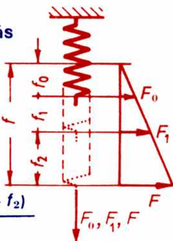
q 115 Número de vueltas $N = \dfrac{f\,d^4\,G}{8\,D_m^3\,F}$

q 116 Carga máxima permisible $F_{\text{máx}} = \dfrac{\pi\,d^3\,\tau_{t\,(\text{perm.})}}{8\,D}$

q 117 Cambio de longitud $f = \dfrac{8\,N\,D_m^3\,F}{d^4\,G} = \dfrac{\pi N\,D^2\,\tau_{t\,(\text{perm.})}}{d\,G}$

Con deformación inicial

Emplear las mismas fórmulas anteriores. Además



q 118 Cambio de longitud $f = f_0 + f_1 + f_2$

q 119 $= f_2 \dfrac{F}{F - F_1}$

q 120 Predeformación $f_1 = f_2 \dfrac{F_1}{F - F_1}$

q 121 Fuerza de predeformación $F_0 = F \dfrac{f - (f_1 + f_2)}{f}$

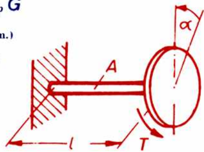
Resorte de barra de torsión

q 122 Torsión máx. permisible $\alpha_{\text{máx}} = \dfrac{57.3\,l\,S_p\,\tau_{t\,(\text{perm.})}}{I_p\,G}$

q 123 Momento máx. permisible $T_{\text{máx}} = S_p\,\tau_{t\,(\text{perm.})}$

q 124 Torsión (ángulo en grados) $\alpha = \dfrac{57.3\,T\,l}{I_p\,G}$

q 125 Momento torsionante $T = \dfrac{\alpha\,I_p\,G}{57.3\,l}$



---

f_0 Deformación total inicial producida al enrollar el resorte

I_p Momento polar de inercia del área transversal A

S_p Módulo polar de sección del área transversal A

$\tau_{t\,(\text{perm.})}$ Esfuerzo cortante perm. por torsión (Ver valores en Z 19)

EJES, ARBOLES O FLECHAS

Según el tipo de carga los ejes se calculan considerando:

Esfuerzo permisible del material

q 126 En torsión simple: $\tau_t = \dfrac{5.1\,T}{d^3}\ \tau_{t\ (\text{perm.})}$

En torsión y flexión combinadas: Ver P 7 y P 11

Cambio de forma por flexión

Se presenta por efecto de la tensión en bandas de transmisión, por presión de dientes de engranes y por acción electromagnética en máquinas eléctricas. Si la variación de forma es fuerte se presenta trabamiento en los cojinetes o chumaceras y una disminución irregular (unilateral) del entrehierro en máquinas eléctricas. El cálculo por flexión se verifica según P 4.

Cambio de forma por torsión

Para obtener una marcha uniforme, sobre todo en el caso de cigüeñales, el ángulo de torsión ϕ con carga no debe ser demasiado grande.

q 127 $\phi = \dfrac{l\,T}{G\,I_p}$ (en radianes)



Velocidad angular (frecuencia) crítica n_k para vibraciones torsionales

Se presenta en ejes de gran longitud, grandes distancias entre apoyos y altas velocidades de rotación (rpm).

La frecuencia crítica n_k se calcula según M 6

q 128 Velocidad angular de trabajo $n \cong k n_k$ $(k = 0.80$ a $0.90)$

Velocidad angular crítica n'_k para vibraciones flexionales

q 129	Carga simétrica	$n_k' = 6550\ \sqrt{\dfrac{E\,I}{F\,l^3}}$ rpm	
q 130	Carga no simétrica	$n_k' = 1637\ \sqrt{\dfrac{E\,I\,l}{F\,a^2\,b^2}}$ rpm	

d Diámetro del eje (mm)
l Longitud del eje (mm)
I Momento de inercia del área (transversal) (mm^4) (ver P 3)
I_p Momento polar de inercia del área (mm^4) (ver P 7)
E Módulo de elasticidad axial (kgf/mm^2) (ver Z 18 y Z 19)
G Módulo de elasticidad angular (kgf/mm^2) (ver Z 19)
F Carga flexionante (kgf)

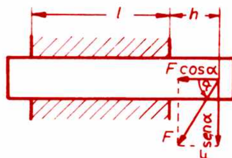
GUIA

En el caso de uno de estos elementos se tiene

q 131 $\tan\alpha < \dfrac{l}{(2h + l)\,\mu}$, o bien

la relación de longitudes

q 132 $\dfrac{l}{h} = \lambda > \dfrac{2\,\mu \tan\alpha}{1 - \mu \tan\alpha}$



Si no se tienen las condiciones anteriores para $\tan\alpha$, se presentará trabamiento o efecto de abrazadera.

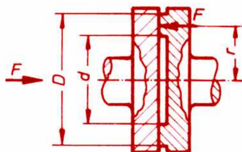
ACOPLAMIENTOS DE FRICCION

Cople simple de discos

q 133 $T_{fr.} = \dfrac{\mu F}{3} \cdot \dfrac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$

q 134 $\cong \mu F r$

q 135 $r = \dfrac{D + d}{4}$



Cople múltiple de discos

q 136 $T_{fr.} = \dfrac{\mu F N}{3} \cdot \dfrac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$

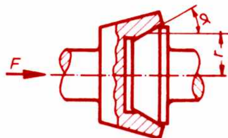
q 137 $\cong \mu F r N$



Cople cónico

q 138 $T_{fr.} = \dfrac{\mu F r}{\operatorname{sen}\alpha}$

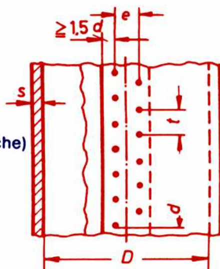
Para que no haya agarre excesivo se debe tener
$\tan\alpha \geqq \mu$



$T_{fr.}$	Momento de fricción	μ	Coef. de fricción	(ver Z 20)
r	Radio medio	N	Núm. de zonas de contacto	

TAMBOR CILINDRICO

Espesor de pared en el caso de junta:



q 139 Remachada $s \cong \dfrac{p\,D\,N}{2\,v\,\sigma_{t(\text{perm.})}} + 1\text{ mm}$

q 140 Soldada $s \cong \dfrac{p\,D\,N}{0.3\,\sigma_{t(\text{perm.})}}$

Dimensiones del remachado (d = diám. remache)

q 141 $d = \sqrt{50\,s\text{ mm}} - 4\text{ mm}$ | $v = \dfrac{t-d}{t}$

q 142 $t = 3\,d + 5\text{ mm}$

q 143 $e = 0.8\,t$ | $e_1 = 0.6\,t$

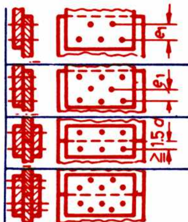
Esfuerzos de tensión en:

	Junta circunferencial	Junta longitudinal
q 144	$\sigma_t = \dfrac{\pi D^2 p}{4\,s(\pi D - n\,d)}$	$\sigma_t = \dfrac{D\,p\,t}{2(t-d)s}$

q 145 Revisión de la placa (o lámina): $(t-d)s\,\dfrac{\sigma_{t(\text{perm.})}}{N} \geqq 0.5\,D\,p\,t$

Revisión de las remachaduras por

q 146	cortante simple	$2\,\dfrac{\pi}{4}\,d^2\,\tau_n$	$\geqq 0.5\,D\,p\,t$
q 147		$3\,\dfrac{\pi}{4}\,d^2\,\tau_n$	
q 148	cortante doble	$\dfrac{\pi}{4}\,d^2\,\tau_n$	
q 149		$3\,\dfrac{\pi}{4}\,d^2\,\tau_n$	



Valores permisibles de τ_n en N/mm² (C. Bach)

	Remachadura	Cortante simple	Cortante doble
q 150	1 fila	60 — 70	100 — 120
q 151	2 filas	55 — 65	95 — 115
q 152	3 filas	50 — 60	90 — 110

n Número de agujeros en una línea circunferencial

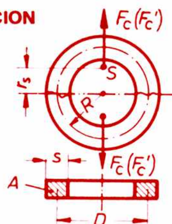
N Factor de seguridad dependiente de la temperatura:
$N \cong 2$ para una temperatura de pared $t = 250°C$
$N \cong 5$ para una temperatura de pared $t = 250°C$

p Presión interna (manométrica) del recipiente

$\sigma_{t(\text{perm.})}$ Esfuerzo permisible de tensión (Ver valores en Z 18)

v Coeficiente de debilitamiento $\cong 0.8$

ANILLO (O ZUNCHO) DE CONTRACCION



En el caso de un elemento de esta clase que debe mantener fija una parte de una máquina rotatoria, por ejemplo, un volante o el devanado de un motor, la fuerza de contracción F_c deberá ser al menos el doble de la fuerza centrífuga F_c':

q 153 $$F_c \geqq 2 F_c'$$

Fuerza centrífuga, F_c'

q 154 $$F_c' = m\, r_s\, \omega^2 = 4\,\pi^2\, m\, r_s\, n^2$$ (n en rps)

q 155 $$r_s = \frac{2R}{\pi}$$

q 156 $$m = \frac{G}{g}$$

Area transversal del anillo, A

q 157 $$A = \frac{F_c}{2\,\sigma_{a(\text{perm.})}}$$

Grado de contracción λ

Es el grado en que debe ser menor el diámetro interior del anillo, que el diámetro exterior del elemento a fijar.

q 158 $$\lambda = \frac{1}{E} D\, \sigma_{t(\text{perm.})}$$

Ancho s de un anillo delgado

q 159 $$s = \frac{D\,\sigma_{t(\text{perm.})}}{2\,\sigma_{t(\text{perm.})}}$$

R	Radio medio
D	Diámetro medio
G	Peso de medio anillo
$\sigma_{a(\text{perm.})}$	Esfuerzo permisible de aplastamiento (Ver valores en Z 18)
$\sigma_{t(\text{perm.})}$	Esfuerzo permisible de tensión (Ver valores en Z 18)

Máquinas-herramienta — R 1

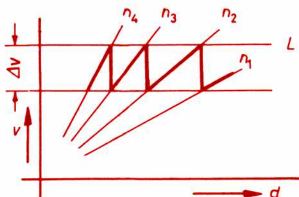
Escalonamiento de velocidades

DIAGRAMA PARA LAS VELOCIDADES DE ROTACION

Construcción del diagrama en "diente de sierra". Para cada velocidad de giro n dada (en rpm) se traza la gráfica de la velocidad periférica v de la herramienta o de la pieza trabajada, en función del diámetro d, según la relación

$$v = \pi\, n\, d$$

Lo anterior da un haz de rectas que parten del origen. Se traza luego una recta horizontal L correspondiente a una v determinada. De sus puntos de intersección con las líneas de velocidad se trazan segmentos verticales hasta cada una de éstas. Cuanto más uniforme sea su longitud tanto mejor será el escalonamiento de velocidades.



Escalonamiento.

Los mejores intervalos de velocidad de giro (revoluciones) se obtienen cuando, como se ve en la figura, todas las longitudes Δv son iguales. La anterior condición se satisface con una serie geométrica de valores de velocidad:

r 1 $$n_k = n_1 \Phi^{k-1}$$

Cada velocidad se calcula como sigue

r 2 $n_2 = n_1 \Phi$ | $n_3 = n_1 \Phi^2$ | $n_4 = n_1 \Phi^3$ | etc.

r 3 Número de pasos $$k = 1 + \frac{\log \frac{n_k}{n_1}}{\log \Phi}$$

r 4 Factor de la serie $$\Phi = \sqrt[k-1]{\frac{n_k}{n_1}}$$

Valores estándares de Φ : 1.06 — 1.12 — 1.26
1.41 — 1.58 — 2.00

n_1 Velocidad mínima (rpm)
n_k Velocidad máxima (rpm)

Máquinas-herramienta

Escalonamiento de velocidades

R 2

CALCULO DE ESCALONAMIENTOS

Poleas escalonadas

Para emplear una misma banda de transmisión, los diámetros de los pasos o escalones deben ser los mismos, pero en orden inverso, en las poleas impulsora e impulsada.
Hay que elegir primero el diámetro mayor d_1. En el caso de tornos, su valor lo determina el volteo o altura de puntos.

r 5 $d_1 : d_4 = \sqrt{\Phi^3} : 1$

r 6 $d_1 : d_2 = \sqrt{\Phi} : 1$ $\quad$ $d_2 : d_3 = \sqrt{\Phi} : 1$

r 7 $d_2 = \dfrac{d_1 \sqrt{\Phi}}{2\sqrt{\Phi} - 1}$

r 8 $d_1 : d_5 = \Phi^2 : 1$

r 9 $d_1 : d_3 = \Phi : 1$ $\quad$ $d_2 : d_4 = \Phi : 1$

r 10 $d_2 = \dfrac{d_1 + d_3}{2}$ $\quad$ $d_3 = \dfrac{d_1 + d_5}{2}$

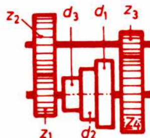
r 11 $d_4 = \dfrac{d_3 + d_5}{2}$

Poleas escalonadas con impulsión de engranes
(i = relación de transmisión)

Para engranajes se emplea la fórmula

r 12 $T_{\text{máx}} = F_b \dfrac{d_1}{2}$.

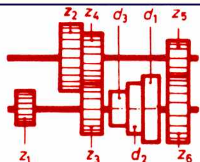
r 13 $i = \Phi^{k/2} = \dfrac{z_2\, z_4}{z_1\, z_3}$



r 14 $i_1 = \Phi^{k/3} = \dfrac{z_4\, z_6}{z_3\, z_5}$

r 15 $i_2 = \Phi^{2k/3} = \dfrac{z_2\, z_6}{z_1\, z_5}$

r 16 $z_3 = z_4$ (valores seleccionados)



F_b	Tensión máx. en la banda	$T_{\text{máx.}}$	Mom. máx. de rotación
k	Número de pasos (ver R 1)	Φ	Factor de la serie

Máquinas-herramienta

Fórmulas diversas

Impulsión de una máquina-herramienta

r 17 Potencia del motor $P = \frac{2\pi r n F}{\eta}$

r 18 $= \frac{v F}{\eta}$

r 19 Diámetro del eje o árbol $d \cong \sqrt[3]{\frac{5.1\,T}{\tau_{t\,(\mathrm{perm.})}}}$

r 20 Momento de rotación en el eje de trabajo $T = F \frac{D}{2}$

Fuerza de corte (presión de viruta) F

r 21 En tornos $F = A K$

r 22 En fresadoras $F = \frac{b t f K}{v}$

r 23 Carga sobre el árbol de fresado $F' = 1.4\,F$

Resistencia específica del acero, K

r 24 $K = a\,\sigma_R$

Resistencia a la tensión σ_R en N/mm²	400	500	600	700	800	900	1000
a	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.2

r 25

Transmisión por banda

r 26 Tensión en la banda $F_b = \frac{2\,T}{d} = \frac{P}{v_b}$

r 27 Velocidad de la banda $v_b = \pi d_1 n$

r 28 Relación para el ancho B de una banda (N/mm) $F_b' = B\,\sigma_b$ (por unidad de grueso)

Anchura B en mm	50	60	70	80	100	120	150
Esfuerzo permisible de tensión σ_b en N/mm²	10	12	12	13	15	15	16

r 29

Ver en R 4 la explicación de los símbolos.

Máquinas-herramienta

Potencias necesarias

R 4

CALCULO APROXIMADO DE LA POTENCIA

	Tipo de máquina		Potencia aproximada en kW (1 kW = 1.34 hp = 1.36 cv)
r 30	Torno	ligero	0.015 × Volteo (altura de puntos) (mm)
r 31		mediano	0.030 × Volteo (mm)
r 32		pesado	0.045 × Volteo (mm)
r 33	Torno revólver	ligero	0.080 × Alimentación de material (mm)
r 34		pesado	0.120 × Alimentación de material (mm)
r 35	Torno automático	un husillo	Igual que en el torno revólver (de torreta)
r 36		varios husillos	Igual que en el torno revólver, multiplicando por el núm. de husillos de trabajo.
r 37	Taladro	normal	0.080 × Diámetro de barreno (mm)
r 38		alta potencia	0.150 × Diámetro de barreno (mm)
r 39	Fresadora	ligera	0.001 × Area de mesa (cm^2)
r 40		pesada	0.002 × Area de mesa (cm^2)
r 41	Cepillo de codo		0.010 × Carrera máxima (mm)
r 42	Cepilladora (de mesa)		0.006 × Anchura de corte (mm)
r 43	Rectificadora redonda		0.018 × Diámetro de disco (mm)
r 44	Rectificadora plana		0.012 × Diámetro de disco (mm)

Símbolos de R 3:

A	Area transversal de viruta
b	Anchura de fresa
f	Avance o alimentación
d_1	Diámetro de polea principal
D	Diámetro del material en tornos Diámetro del cortador en fresadoras
σ_b	Esfuerzo máx. permisible en bandas
t	Profundidad del corte
v	Velocidad de corte
η	Eficiencia mecánica entre el motor y el husillo de trabajo
$\tau_{t(\text{perm.})}$	Esfuerzo cortante permisible por torsión
n	Velocidad de giro (rps o rpm)

MAGNITUDES PRINCIPALES Y SUS UNIDADES

s 1 Empleo de mayúsculas y minúsculas en símbolos

En electrotecnia se emplean letras mayúsculas para designar cantidades constantes, y las correspondientes letras minúsculas —o las mayúsculas con el subíndice t— para designar cantidades que varían en el tiempo.

Ejemplos: Fórmulas s 8, s 9, s 13
Excepciones: f, ω, I_m, U_m, p_{Fe10}, etc.

Trabajo eléctrico W

El trabajo eléctrico equivale al trabajo mecánico definido en M 1. Al transformar energía, sin embargo, se presentan pérdidas.

Unidades: W · s (watt-segundo), kW · h, MW · h
1 W · s = 1 joule (J) = 1 N · m

Con las definiciones dadas en S 1 y S 2 se cumple que

s 2
$$W = I\,U\,t = \frac{U^2}{R}\,t = I^2\,R\,t$$

Potencia eléctrica P

La potencia eléctrica equivale a la potencia mecánica definida en M 1. Sin embargo, al transformar potencia se presentan pérdidas.
Unidades: W (watt), kW, MW

$$1\ \mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}}$$

Con las definiciones dadas en S 1 y S 2 se cumple que

s 3
$$P = \frac{U^2}{R} = I^2\,R$$

Frecuencia f Ver L 1

Período T Ver L 1

Frecuencia angular ω Ver L 1

Intensidad de corriente eléctrica I

Es una cantidad fundamental. Ver Explicaciones generales
Unidades: A (ampere), mA, kA

La intensidad de corriente de 1 A se define en función de la fuerza de atracción entre dos conductores paralelos por los que circula corriente en uno y otro sentidos.

Electrotecnia

Conceptos generales

Densidad de corriente eléctrica J

s 4 $$J = \frac{I}{A}$$

Esta fórmula es válida solamente si la corriente I está distribuida uniformemente en el área A.
Unidades: A/m^2, A/mm^2

Tensión eléctrica U (o bien V)

s 5 $$U = \frac{P}{I}$$

Unidades: V (volt), mV, kV

1 V es igual a la diferencia de potencial o tensión entre dos puntos de un circuito donde una corriente (directa o continua) de 1 A desarrolla una potencia de 1 W.

$$1\,V = 1\,\frac{W}{A} = 1\,\frac{J}{s \cdot A} = 1\,A \cdot \Omega = 1\,\frac{N \cdot m}{s \cdot A}$$

Resistencia eléctrica R

s 6 $$R = \frac{U}{I} \quad \text{(ley de Ohm)}$$

Unidades: Ω (ohm), kΩ, MΩ

1 Ω es la resistencia eléctrica de un conductor por el que pasa una corriente de 1 A cuando se le aplica una tensión de 1 V.

$$1\,\Omega = 1\,\frac{V}{A} = 1\,\frac{W}{A^2} = 1\,\frac{J}{s \cdot A^2} = 1\,\frac{N \cdot m}{s \cdot A^2}$$

Conductancia eléctrica G

La conductancia eléctrica es el recíproco de la resistencia:

s 7 $$G = \frac{1}{R}$$

Unidades: 1 S (siemens) (anteriormente, mho)

Carga eléctrica Q

s 8 $$q = \int i\,dt$$ (ver s 1)

Si la corriente es constante i es igual a I, y entonces:

s 9 $$Q = I\,t$$

Q es también proporcional al número de electrones que posee un cuerpo en exceso a los que le corresponden en estado neutro.
Unidades: C (coulomb), mC, μC, pC; A · h

$$1\,C = 1\,A \cdot s \qquad 1\,A \cdot h = 3.6\,KC$$

Capacitancia eléctrica *C*

La capacitancia (o capacidad) eléctrica *C* de un condensador o capacitor es la relación de su carga *Q* a la diferencia de potencial *U* entre sus placas.

s 10
$$C = \frac{Q}{U}$$

Unidades: F (farad), μF, nF, pF

1 F es la capacitancia de un condensador que adquiere una carga de 1 C al aplicarle una diferencia de potencial de 1 V.

$$1\ \mathrm{F} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1\,\frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V}} = 1\,\frac{\mathrm{A^2 \cdot s}}{\mathrm{W}} = 1\,\frac{\mathrm{A^2 \cdot s^2}}{\mathrm{J}} = 1\,\frac{\mathrm{A^2 \cdot s^2}}{\mathrm{N \cdot m}}$$

Flujo magnético Φ

s 11
$$\Phi_t = \frac{1}{N}\int e\,dt \qquad \text{(ver s 1)}$$

donde *N* es el número de vueltas o espiras de una bobina y *e* la tensión autoinducida (fuerza electromotriz) que se produce, si varía en el tiempo el flujo Φ concatenado por la bobina.
Unidades: Wb (weber) = V · s = 10^8 Mx (maxwell)

1 Wb es el flujo magnético que al disminuir uniformemente a cero en 1 s induce en la bobina de una espira que lo concatena una tensión de 1 V.

Densidad de flujo magnético (o inducción magnética) *B*

Para una densidad de flujo *B* en una área *A* se tiene:

s 12
$$B = \frac{\Phi}{A}$$

donde *A* es el área atravesada perpendicularmente por el flujo uniforme Φ

Unidades: T (tesla), μT, nT, V · s/m²; Gs (gauss)

$$1\ \mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{cm^2}} = 10^4\ \mathrm{Gs} = 10^4\,\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{cm^2}}$$

1 T es la densidad de flujo producida por un flujo uniforme de 1 Wb al atravesar perpendicularmente una superficie de 1 m².

(Auto) Inductancia electromagnética L

s 13 $$L = N\frac{\Phi}{I} = N\frac{\Phi_t}{i}$$ (ver s 1)

donde I es la corriente que pasa por un inductor o bobina de N vueltas concatenada con un flujo magnético Φ.
Unidades: H (henry), mH

1 H es la (auto) inductancia de una bobina de una espira en el vacío, por la que al pasar una corriente de 1 A produce un flujo concatenado de 1 Wb.

$$1\ \mathrm{H} = 1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}}$$

Intensidad de campo magnético H

s 14 $$H = \frac{B}{\mu_o \mu_r}$$

Unidades: A/m, A/cm, A/mm (anteriormente ampere-vuelta/metro, etc.).

Fuerza magnetomotriz $\mathscr{F}$

s 15 $$\mathscr{F} = N\,I$$

Unidades: A, kA, mA (anteriormente ampere-vuelta, etc.).

Tensión magnética $\mathscr{U}$

En el i-ésimo tramo de un circuito magnético:

s 16 $$\mathscr{U}_i = H_i \cdot l_i$$

donde l_i es el recorrido del flujo magnético en dicho tramo.

s 17 $$\sum_{i=1}^{n} \mathscr{U}_i = \mathscr{F}$$ (ley de la fuerza magnetomotriz)

Reluctancia magnética $\mathscr{R}$

En un circuito magnético uniforme:

s 18 $$\mathscr{R} = \frac{\mathscr{F}}{\Phi}$$ (ley de Ohm para el circuito magnético)

Unidades: $1/\mathrm{H} = \mathrm{A/V \cdot s}$

Permeancia magnética $\mathscr{P}$

En un circuito magnético uniforme:

s 19 $$\mathscr{P} = \frac{1}{\mathscr{R}} = \frac{\Phi}{\mathscr{F}}$$

Unidades: $\mathrm{H} = \mathrm{V \cdot s/a}$

Ver el significado de los símbolos de las fórmulas en S 16.

LEYES BASICAS DE LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

Marcas de polaridad y flechas de sentido

Polaridad de terminales y sentido positivo de la corriente en

s 20 Fuente: $- \longrightarrow +$

s 21 Carga: $+ \longrightarrow -$

Polaridad de tensión y sentido positivo de caída de potencial

s 22 $+ \longrightarrow -$

Polaridad de tensión y sentido de corriente

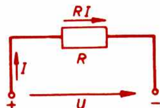
	Características de una fuente de energía o una carga	Polaridad de tensión y sentido de corriente	Si el cálculo da un resultado con valor positivo — entonces las marcas de polaridad de la tensión y el sentido de la corriente son	Si el cálculo da un resultado con valor negativo — entonces las marcas de polaridad de la tensión y el sentido de la corriente son
s 23	conocidas	indicar (como se señaló antes)	—	—
s 24	desconocidas	suponer	correctos	los contrarios

Recomendación adicional:
En el caso de una caída de potencial en un resistor hay que señalar igual sentido para la corriente y la tensión ($R > 0$).

Ley de Ohm

Corriente en un resistor

s 25 $$I = \frac{U}{R}$$ (ver también s 6)



Resistencia de un conductor

s 26 $$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\gamma A}$$

Resistencia de un conductor a una temperatura θ

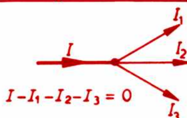
s 27 $$R = R_{20}\,[1 + \alpha\,(\theta - 20°\mathrm{C})]$$

Calentamiento eléctrico de una masa m

s 28 $$U\,I\,t\,\eta = c\,m\,\Delta\theta$$

α	Coeficiente de temperatura de la resistencia	(ver Z 1)
γ	Conductividad eléctrica	(ver Z 1)
ρ	Resistividad eléctrica	(ver Z 1)
c	Capacidad térmica o calor específico	(ver o 9 y Z 5)
t	Tiempo	
R_{20}	Resistencia a $\theta = 20°C$	
$\Delta\theta$	Incremento de temperatura	
η	Eficiencia	

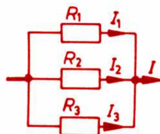
1a. Ley de Kirchhoff (regla de las corrientes)*
En un nodo de una red, la suma algebraica de todas las corrientes es nula.



s 29 $$\Sigma I = 0$$

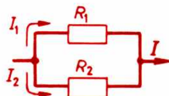
donde las $\dfrac{\text{corrientes que llegan son positivas}}{\text{corrientes que salen son negativas}}$

Relaciones entre corrientes (conexión en paralelo)
En una conexión en paralelo de resistores, la corriente total y las corrientes de las ramas guardan entre sí la misma relación que el recíproco de la resistencia equivalente y los recíprocos de las resistencias conectadas.



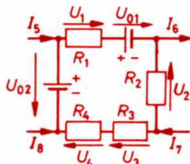
s 30 $$I : I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$$

División de la corriente
En dos resistores conectados en paralelo:



s 31 $$I_1 = I\frac{G_1}{G_1 + G_2} = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

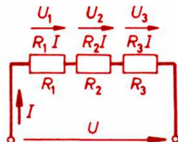
2a. Ley de Kirchhoff (regla de las tensiones)*
En un circuito cerrado o malla de una red, la suma algebraica de todas las tensiones es nula.



s 32 $$\Sigma U = 0$$

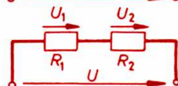
donde las tensiones cuyo sentido corresponde al sentido de recorrido son positivas, y las de sentido contrario son negativas.

Relaciones entre tensiones (conexión en serie)
En una conexión en serie de resistores, las caídas de tensión en las resistencias guardan entre sí la misma relación que las resistencias conectadas.



s 33 $$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3$$

División de la tensión
En dos resistores conectados en serie:



s 34 $$U_1 = U\frac{G_2}{G_1 + G_2} = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

*Ver otras observaciones en la página S 8

Conexión en serie*

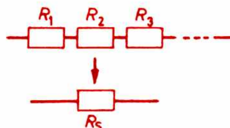
Resistencia equivalente R_s (ver también s 33)

En general,

s 35 $R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$

Con n resistencias iguales R se tiene

s 36 $R_s = n\,R$



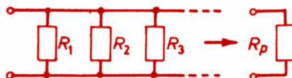
Conexión en paralelo*

Resistencia equivalente R_p (ver también s 30)

En general,

s 37 $\dfrac{1}{R_p} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dots$

s 38 $G_p = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$



con 2 resistencias	con 3 diferentes	con n resistencias iguales R
s 39 $R_p = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$	$R_p = \dfrac{R_1\,R_2\,R_3}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_1\,R_3}$	$R_p = \dfrac{R}{n}$
s 40 $= \dfrac{1}{G_1 + G_2}$	$= \dfrac{1}{G_1 + G_2 + G_3}$	$= \dfrac{1}{n\,G}$

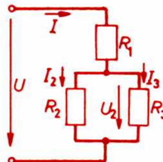
Conexión en serie-paralelo*

Una conexión mixta en serie-paralelo de resistencias conocidas se descompone de dentro hacia afuera en conexiones simples en paralelo y en serie. Estas se transforman individualmente y se vuelven a componer después. Por ejemplo:

s 41 $I = \dfrac{R_2 + R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3}\,U = \dfrac{G_1\,(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}\,U$

s 42 $I_3 = \dfrac{R_2}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3}\,U = \dfrac{G_1\,G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\,U$

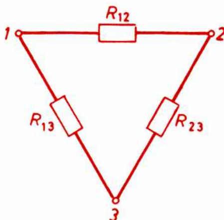
s 43 $U_2 = \dfrac{R_2\,R_3}{R_1\,R_2 + R_1\,R_3 + R_2\,R_3}\,U = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3}\,U$

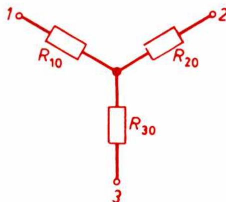


*Ver la observación en la página S 8

TRANSFORMACION DE CONEXIONES

Estrella (Y) a delta (Δ) y viceversa*





s 44

$$R_{12} = \frac{R_{10} \cdot R_{20} + R_{10} \cdot R_{30} + R_{20} \cdot R_{30}}{R_{30}} \qquad R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{23} + R_{12} + R_{13}}$$

s 45

$$R_{13} = \frac{R_{10} \cdot R_{20} + R_{10} \cdot R_{30} + R_{20} \cdot R_{30}}{R_{20}} \qquad R_{20} = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{23} + R_{12} + R_{13}}$$

s 46

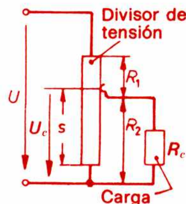
$$R_{23} = \frac{R_{10} \cdot R_{20} + R_{10} \cdot R_{30} + R_{20} \cdot R_{30}}{R_{10}} \qquad R_{30} = \frac{R_{23} \cdot R_{13}}{R_{23} + R_{12} + R_{13}}$$

Divisor de tensión (potenciómetro)

Este dispositivo permite subdividir una tensión dada.

s 47

$$U_c = \frac{R_2\, R_c}{R_1\, R_2 + R_1\, R_c + R_2\, R_c}\, U$$



Si en aplicaciones de metrología es necesario tener una proporcionalidad aproximada entre U_c y s entonces:

s 48 $R_c \geqq 10\,(R_1 + R_2)$

s Desplazamiento desde 0 del contacto deslizante (cursor)

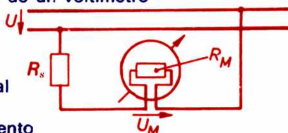
*Nota: En todas las fórmulas de las páginas S6 a S9 puede sustituirse la resistencia R por la impedancia Z, y la conductancia G por la admitancia Y.

APLICACIONES EN METROLOGIA*

Ampliación del intervalo de medición de un voltímetro

s 49

$$R_s = R_M \left(\frac{U}{U_M} - 1 \right)$$

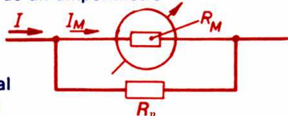


U Valor deseado } Intervalo final
U_M Valor disponible } de medición
R_M Resistencia interna del instrumento

Ampliación del intervalo de medición de un amperímetro

s 50

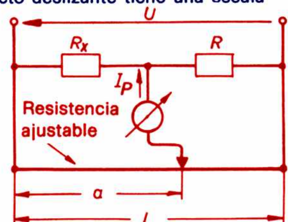
$$R_p = R_M \frac{I_M}{I - I_M}$$



I Valor deseado } Intervalo final
I_M Valor disponible } de medición

Puente de Wheatstone para medir una resistencia R_x

Se emplea para determinar una resistencia entre 0.1 y 10^6 Ω. La resistencia calibrada para el contacto deslizante tiene una escala con los valores $a/(\ell - a)$.
Se mueve el contacto hasta que sea cero la corriente del puente I_P. Entonces



s 51

$$\frac{R_x}{R} = \frac{a}{\ell - a}$$

de donde

s 52

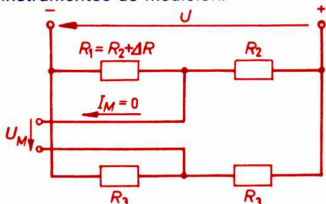
$$R_x = R \frac{a}{\ell - a}$$

Puente de Wheatstone como comparador de un valor medido

Se emplea el puente para evaluar diferencias de potencial representativas en gran número de instrumentos de medición.

R_1 Resistencia que varía según la cantidad x por medir (por ejemplo, temperatura, desplazamiento, ángulo de giro, etc).
R_2 Valor base de R_1

Aproximadamente se cumple que



s 53

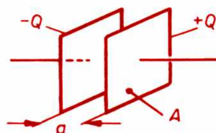
$$U_M \cong \Delta R \cong x$$

*Ver la nota en la página S 8

Capacitancia C de un capacitor



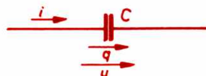
s 54 $$C = \frac{\epsilon_0 \, \epsilon_r \, A}{a}$$



Carga eléctrica Q (ver s 8)

Energía almacenada en un campo eléctrico E_c

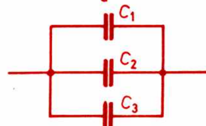
s 55 $$E_c = \frac{1}{2} C \, U^2$$



Conexión en paralelo de capacitores

La capacitancia total o equivalente aumenta a

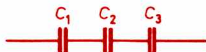
s 56 $$C = C_1 + C_2 + C_3$$



Conexión en serie de capacitores

La capacitancia equivalente disminuye a

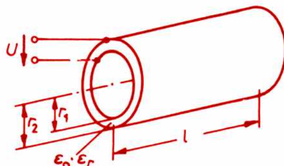
s 57 $$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$



Capacitancia de dos conductores cilíndricos coaxiales



s 58 $$C = 2\pi \, \epsilon_0 \, \epsilon_r \, \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



ϵ_r Coeficiente dieléctrico (ver Z 2)

ϵ_0 Permisividad dieléctrica del vacío (o aire) ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ A · s/V · m)

s 59

A Area de una placa (una cara)

a Espesor del aislamiento

r_1 Radio del cilindro interno

r_2 Radio del cilindro externo

l Longitud de los cilindros

REGLAS

s 60 Movimiento de una aguja magnetizada

El polo norte (N) de la aguja es atraído por un polo magnético sur (S) y repelido por un polo magnético norte (N). Con el polo sur sucederá lo contrario.

s 61 Conductores y bobinas fijos

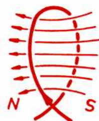
Campo alrededor de un conductor recto con corriente

Si se supone que un tirabuzón en el eje del conductor avanza en el sentido de la corriente, su movimiento de giro indicará el sentido de las líneas de flujo circulares concéntricas.



s 62 Campo en el interior de una espira o bobina con corriente

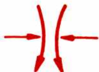
Si se considera que un tirabuzón está colocado perpendicularmente al plano de una espira o en el eje de una bobina, y su giro de avance corresponde al sentido de la corriente, su desplazamiento dará la dirección del campo magnético. En el lado o extremo de salida del flujo estará un polo N, y en el opuesto un polo S.



Conductores y bobinas movibles

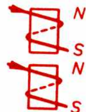
s 63 Conductores paralelos

Dos conductores paralelos que conducen corrientes constantes en el mismo sentido, se atraen, y en sentido contrario, se repelen.



s 64 Bobinas alineadas

Si por dos bobinas colocadas de frente pasan corrientes en el mismo sentido, las bobinas se atraen; si las corrientes tienen sentidos contrarios, las bobinas se repelen.



Máquinas

s 65 Reglas de los tres dedos perpendiculares:

De la mano derecha (para generadores)

Si el índice apunta en la dirección del flujo magnético y el pulgar en el sentido de rotación, el cordial (o medio) indicará el sentido de la tensión generada (FEM) o de la corriente.



s 66 De la mano izquierda (para motores)

Si el índice apunta en la dirección del flujo magnético y el cordial (o medio) en el sentido de la corriente, el pulgar indicará el sentido de la rotación.



MAGNITUDES EN CIRCUITOS MAGNETICOS

Flujo magnético Φ

s 67 $$\Phi = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}} = \frac{N\,I}{\mathscr{R}}$$ (ver s 11)

Densidad de flujo magnético (inducción) B

s 68 $$B = \frac{\Phi}{A} = \mu_r\,\mu_o\,H = \mu H$$ (ver s 12)

Inductancia L

s 69 $$L = N\frac{\Phi}{I} = N^2\mathscr{P} = \frac{N^2}{\mathscr{R}}$$ (ver s 13)

Para el cálculo de L ver también s 140 a s 146

Intensidad de campo magnético H

s 70 $$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\mathscr{U}_i}{l_i}$$ (ver s 14)

Fuerza magnetomotriz $\mathscr{F}$

s 71 $$\mathscr{F} = N\,I = \sum_{i=1}^{n}\mathscr{U}_i$$ (ver s 15)

Tensión magnética $\mathscr{U}_i$ en la i-ésima porción de un circuito magnético

s 72 $$\mathscr{U}_i = H_i\,l_i$$ (ver s 16)

Reluctancia magnética $\mathscr{R}$ de un circuito uniforme

s 73 $$\mathscr{R} = \frac{\mathscr{F}}{\Phi} = \frac{l}{\mu A}$$ (ver s 18)

Permeancia magnética $\mathscr{P}$ de un circuito uniforme

s 74 $$\mathscr{P} = \frac{1}{\mathscr{R}} = \frac{\Phi}{\mathscr{F}} = \frac{\mu A}{l} = \frac{1}{N^2}L$$ (ver s 19)

Energía magnética (almacenada en un campo) E_m

s 75 $$E_m = \frac{1}{2}N\,I\,\Phi = \frac{1}{2}L\,I^2$$

Flujo magnético disperso Φ_d

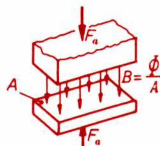
Parte del flujo magnético total Φ_o se dispersa por el aire exterior y resulta así inefectivo. De modo que Φ_d está referido a Φ, el flujo efectivo. Por lo tanto,

s 76 Coeficiente de dispersión $\delta = \dfrac{\Phi_d}{\Phi}$ (0.1 a 0.3)

s 77 Flujo total $\Phi_o = \Phi + \Phi_d = (1+\delta)\,\Phi$

La explicación de los símbolos puede verse en S 16

FUERZAS MAGNETICAS



Fuerza entre dos polos magnéticos

En la dirección del flujo magnético se produce una fuerza de atracción F_a dada por

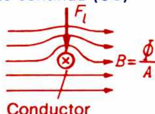
s 78 $$F_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 A}{\mu_0}, \text{ o bien, } F_a \cong 40 \left(\frac{B}{T}\right)^2 \left(\frac{A}{cm^2}\right) N$$

Fuerza sobre un conductor con corriente

Sobre un conductor que lleva una corriente I, el campo magnético ejerce en una longitud l del conductor que lo atraviesa, una fuerza transversal F_l:

s 79 $$F_l = B\,l\,I, \text{ o bien, } F_l = \left(\frac{B}{T}\right)\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{I}{A}\right) N$$

En una armadura o inducido de máquina de corriente continua (CC) se produce el momento de rotación interno

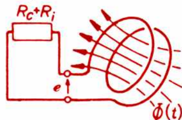


s 80 $$M_i = \frac{1}{2\pi} \Phi I \frac{p}{a} z$$

s 81 $$\text{o bien, } M_i = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Phi}{V \cdot s}\right)\left(\frac{I}{A}\right) \frac{p}{a} z \quad N \cdot m$$

Tensión inducida (ley de la inducción de Faraday)

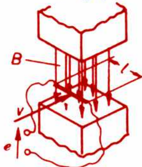
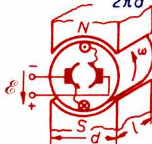
Si una bobina (con N espiras y resistencia interna R_i) enlaza o concatena un flujo magnético Φ variable en el tiempo, se induce en ella una tensión o fuerza electromotriz (FEM)



s 82 $$e = N \frac{d\Phi_t}{dt}$$ (ver s 11)

que hace circular corriente por su circuito conectado.

Tensión inducida por

el movimiento de un conductor normal a un flujo magnético	rotación de una espira o de una bobina en un campo magnético	rotación de la armadura de un generador
s 83 $e = B\,l\,v$	$e = \omega\,\Phi_{máx} \cdot \text{sen}(\omega t)$ $\Phi_{máx} = l\,d\,B$	$\mathcal{E} = \Phi\,n\,z\,\frac{p}{a}$ $= l\,d\,B\,\frac{z\,p}{2\pi a}\,\omega$
		

s 85 **Tensión o FEM de autoinducción:** $e = L \cdot di/dt$

Ver la explicación de la página S 16 | Ver símbolos en la página S 16

CONCEPTOS GENERALES

Fasor

Un fasor es un segmento representativo de una magnitud alterna que gira en sentido contrario al del reloj. Angulos en igual sentido se consideran positivos, y en sentido contrario, negativos.

Ejemplo:





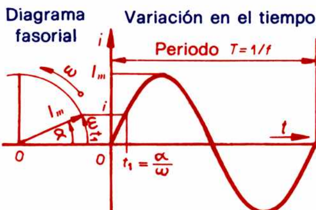
s 86 $\varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ = 0$

s 87 φ_1 equivale a φ_2

Amplitud o valor máximo (ver s 1)

Una magnitud alterna (corriente, i, o tensión, u) varía periódicamente, en general, en forma de onda senoidal. Los valores máximos I_m y U_m reciben el nombre de amplitud. Con una frecuencia angular $\omega = 2\,\pi\,f$, el ángulo descrito en un tiempo t está dado por:

s 88 $$\alpha = \omega t = 2 \pi f t$$



y en este momento los valores instantáneos son:

s 89 de la corriente $i = I_m \operatorname{sen} \omega t = I_m \operatorname{sen} \alpha$

s 90 de la tensión $u = U_m \operatorname{sen} \omega t = U_m \operatorname{sen} \alpha$ (cuando $\phi = 0$)

Valor eficaz (o r.c.m., raíz del cuadrado medio)

Estos valores son los que se emplean en la práctica y los que indican generalmente los instrumentos de medición.

	En general	Para ondas armónicas
s 91	$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$	$I = I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$
s 92	$U = U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt}$	$U = U_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

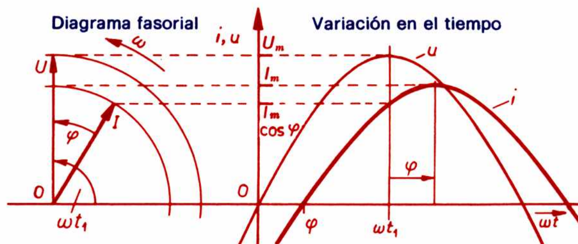
Con estos valores se tiene también en circuitos de corriente alterna:

s 93 $P = U\,I$ (en el caso de $\cos\phi = 1$, ver s 105)

CONCEPTOS GENERALES

Defasamiento, ángulo de fase ϕ

En presencia de impedancias de diversos tipos (resistiva, inductiva o capacitiva) en un circuito de corriente alterna ocurre un desplazamiento en fase o defasamiento, ϕ, entre la corriente y la tensión. El ángulo de fase ϕ se mide en el diagrama fasorial de la corriente a la tensión, y en el diagrama de variación en el tiempo, de la tensión a la corriente.



s 94 $u = U_m \operatorname{sen} \omega t$ $\qquad$ $i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \phi)$

Factor de calidad Q, factor de pérdidas tan δ y ángulo de pérdidas δ

El factor Q de un circuito se define como

s 95 $$Q = 2\pi E_m / w_p$$

donde E_m es el valor máximo de la energía almacenada en el circuito y w_p la pérdida de energía en un periodo.

El recíproco del factor de calidad se conoce como factor de pérdidas.

s 96 $$\tan \delta = 1/Q$$ (δ es el ángulo de pérdidas)

Para un circuito de resistencia e inductancia (s 115 y s 118) y un circuito de resistencia y capacitancia (s 116 y s 119) se obtienen de esta definición las siguientes relaciones sencillas:

s 97 $Q = |\tan \phi|$ $\quad$ | $\tan \delta = 1/Q = 1/|\tan \phi|$

s 98 $ = 90° - |\phi|$ $\quad$ | $= U_R/U_X$ (en la conexión en serie)

s 99 $\quad$ | $= I_R/I_X$ (en la conexión en paralelo)

Pueden verse fórmulas de tan δ en S 17 y S 18.
Para el caso de circuitos resonantes se tienen las fórmulas más complicadas s 128 y s 129.

Electrotecnia

Corriente alterna

Ecuaciones básicas para circuitos monofásicos

Impedancia Z (Ver S 16 y S 17)

s 100 Admitancia $Y = 1/Z$

s 101 Tensión en una impedancia $U = I\,Z$

s 102 Corriente en una impedancia $I = \dfrac{U}{Z}$

s 103 Potencia aparente $P_a = U\,I = \sqrt{P^2 + P_r^2} = I^2\,Z$

s 104 Reactancia $X = Z \operatorname{sen} \phi$

s 105 Potencia activa $P = U\,I \cos \phi = I^2\,R$

s 106 Potencia reactiva $P_r = U\,I \operatorname{sen} \phi = I^2\,X$

s 107 Factor de potencia $\cos \phi = \dfrac{P}{U\,I} = \dfrac{P}{P_a}$

Factor reactivo $\operatorname{sen} \phi = \dfrac{P_r}{U\,I} = \dfrac{P_r}{P_a}$

s 108 Flujo alterno a través de una bobina $\Phi_m = \dfrac{U_L}{4.44\,N\,f}$

---

s 109 μ_o Permeabilidad magnética del vacío ($\mu_o = 4\,\pi \times 10^{-7}$ V · s/A · m)

μ_r Coeficiente magnético (permeabilidad relativa):
para el vacío, gases, líquidos y la mayor parte de los sólidos se tiene $\mu_r = 1$;
para los materiales magnéticos ver la página Z 3

a Número de pasos en paralelo en el devanado

l Longitud de la trayectoria del flujo magnético

N Número de espiras en una bobina o devanado

p Número de pares de polos

z Número de conductores

R_S	Resistencia en	serie	En los circuitos de impedancias en S 17 y S 18
R_P		paralelo	
L_S	Inductancia en	serie	
L_P		paralelo	

Explicación para la página S 13 (FEM de autoinducción)

Ley de Lenz. Si a través de una bobina pasa una corriente i que varía en el tiempo, entonces varía también el campo magnético producido por la corriente. Se induce así en la bobina una tensión instantánea e, que tiene siempre una polaridad tal que contrarresta magnéticamente la variación de la corriente.

	Tipos de componentes		Conexión	Diagrama fasorial	Relación de fases	Defasamiento	Fórmula	$\tan\phi =$
s 110	***Resistiva*** (óhmica) resistor común o anti-inductivo; lámpara		R, I, U_R	U_R, I	I y U en fase	$\phi = 0°$	$Z = R$	0
s 111	***Inductiva*** inductor (o bobina) ideal		X_L, I, U_L	U_L, φ, I	I a 90° atrás de U_L	$\phi = 90°$	$Z = X_L = \omega L$	∞
s 112	***Capacitiva*** capacitor (o condensador)		X_C, I, U_C	φ, I, U_C	I a 90° adelante de U_C	$\phi = -90°$	$Z = X_c = -\dfrac{1}{\omega C}$	$-\infty$
s 113	***Resistiva + inductiva + capacitiva*** en serie	$\omega L_R < \dfrac{1}{\omega C}$	R_S, X_{LS}, X_C, I, U_R, U_L, U_C, U_D, U	U_D, U_L, φ_D, U_R, φ, I, U, U_C	I adelante de U	$-90° < \phi < 0°$	$Z = \sqrt{R_S{}^2 + \left(\omega L_S - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\dfrac{\omega L_S - \dfrac{1}{\omega C}}{R_S}$
s 114	(Reactor real con capacitor en serie)	$\omega L_R > \dfrac{1}{\omega C}$		U_D, U_C, U_L, φ_D, φ, U_R, U, I	I atrás de U	$0° < \phi < 90°$		
s 115	***Resistiva + inductiva*** en serie (Reactor real)		R_S, X_{LS}, I, U_R, U_L, U	U, U_L, φ, U_R, I	I atrás de U menos de 90°	$0° < \phi < 90°$	$Z = \sqrt{R_S{}^2 + (\omega L_S)^2}$	$\dfrac{\omega L_S}{R_S}$

Continuación en S 18

CONTINUACION DE PAGINA S 17

	Tipos de componentes	Conexión	Diagrama fasorial	Relación de fases	Defasamiento	Fórmula	tan ϕ =
s 116	***Resistiva + capacitiva*** en serie	R_s, X_C, I, U_R, U_C, U	U_R, φ, I, U_C, U	I adelante de U menos de 90°	$-90° < \phi < 0°$	$Z = \sqrt{R_s^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$-\frac{1}{R_s \omega C}$
s 117	***Resistiva + inductiva*** en paralelo	I_R, R_P, I_L, X_{LP}, I, X_C, I_C, U	U, I_C, I_R, I_L, I, I_D, φ	I adelante o atrás de U según las componentes	$-90° < \phi < 90°$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_P}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_P} - \omega C\right)^2}}$	$R_P \left(\frac{1}{\omega L_P} - \omega C\right)$
s 118	***Resistiva + inductiva*** en paralelo	I_R, R_P, X_{LP}, I, I_L, U	U, I_L, I_R, I, φ	I atrás de U	$0° < \phi < 90°$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_P}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_P}\right)^2}}$	$\frac{R_P}{\omega L_P}$
s 119	***Resistiva + capacitiva*** en paralelo	I_P, R_P, I, C, I_C, U	I_C, U, I, I_R, φ	I adelante de U	$-90° < \phi < 0°$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_P}\right)^2 + (\omega C)^2}}$	$-R_P \omega C$

s 120 Para un reactor (o bobina de reactancia) los valores dados de R y L son por lo general las cantidades R_s y L_s, *independientes de la frecuencia*, en el circuito equivalente en serie (ver s 115). En conexiones en paralelo de reactores y capacitores se recomienda usar los valores del circuito equivalente en paralelo (ver s 118). Las cantidades R_P y L_P, *dependientes de la frecuencia*, de este circuito se calculan a partir de R_s y L_s empleando las fórmulas:

$$R_P = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s}$$

s 121

$$L_P = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s}$$

CIRCUITO RESONANTE

		en serie	en paralelo
	Diagramas de conexiones y fasoriales	Ver s 113	Ver s 117
	Diagrama fasorial en caso de resonancia	U_L, $U = U_R$, U_C, I	U, I_C, I_L, $I = I_R$
s 122	Condiciones de resonancia	$U_L = U_C$	$I_L = I_C$
s 123		$\omega_r L_R - \dfrac{1}{\omega_r C} = 0$	$\dfrac{1}{\omega_r L_P} - \omega_r C = 0$
s 124		$\omega_r^2 L_R C = 1$	$\omega_r^2 L_P C = 1$
s 125	Frecuencia de resonancia	$f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_R C}}$	$f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_P C}}$
		[Cuando f (frec. de línea) $= f_r$, ocurre la resonancia]	
s 126	Corriente en la resonancia	$I_r = \dfrac{U}{R_R}$	$I_r = \dfrac{U}{R_P} = \dfrac{R_R C U}{L_R}$
s 127		$U_b = U_L - U_C = 0$; $\phi = 0$	$I_b = I_L - I_C = 0$; $\phi = 0$
s 128	Factor Q	$Q_R = \dfrac{\omega_r L_R}{R_R} = \dfrac{1}{\omega_r C R_R}$	$Q_P = \omega_r C R_P = \dfrac{R_P}{\omega_r L_P}$
s 129	Factor de pérdidas	$\tan \delta_R = \dfrac{1}{Q_R} = \dfrac{R_R}{\omega_r L_R}$	$\tan \delta_P = \dfrac{1}{Q_P} = \dfrac{1}{\omega_r C R_P}$
s 130	Longitud de onda	$\lambda = \dfrac{c}{f_r} = \dfrac{300 \times 10^6 \text{ m/s}}{f_r}$	
s 131	Periodo en la resonancia	$T_r = 2\pi\sqrt{L_R C}$	$T_r = 2\pi\sqrt{L_P C}$

Filtro. Un circuito resonante en paralelo tiene impedancia máxima $Z_{máx}$ a su frecuencia de resonancia. De modo que puede actuar como filtro eliminando corrientes de esa frecuencia.

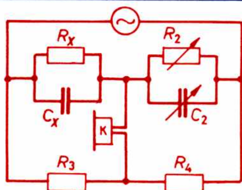
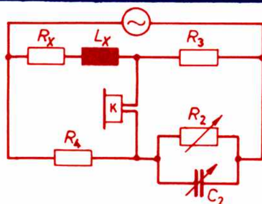
s 132 $$Z_{máx} = R_P = \frac{L_R}{R_R C} \quad \text{y además} \quad I = \frac{U}{Z_{máx}}$$

Ver los símbolos en S 16

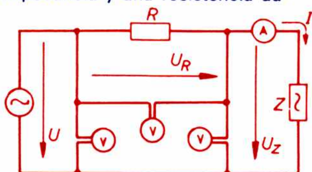
PUENTE DE MEDICION PARA CORRIENTE ALTERNA

Se emplea para determinar la capacitancia de condensadores y la inductancia de bobinas. Para hacerlo deben ajustarse el capacitor variable C_2 y el resistor R_2, hasta que la señal en el audífono K haya alcanzado un mínimo o desaparecido. Los circuitos mostrados no dependen de la frecuencia.

Medición de

capacitancias	inductancias
	
s 133 $C_X = \frac{R_4}{R_3} C_2$	$L_X = C_2 R_3 R_4$
s 134 $R_X = \frac{R_3}{R_4} R_2$	$R_X = \frac{R_3 R_4}{R_2}$
s 135 $\tan \delta_X = \frac{1}{R_X \omega C_X}$	$\tan \delta_X = \frac{R_X}{\omega L_X}$

Determinación de una impedancia desconocida. Se obtiene midiendo la caída de tensión en esa impedancia y una resistencia auxiliar:



s 136 $$P_Z = \frac{U^2 - U_R^2 - U_Z^2}{2\,R}$$

s 137 $$\cos \phi_Z = \frac{P_Z}{U_Z\, I}$$

s 138 $$Z = \frac{U_Z}{I}$$

La resistencia auxiliar debe seleccionarse de manera que

s 139 $U_R \cong |U_Z|$.

C_X	Capacitancia desconocida	δ_X	Angulo de pérdidas (ver S 15)
L_X	Inductancia desconocida	R_2, R_3, R_4	Resistencias conocidas

R_X Resistencia desconocida del capacitor o del inductor
C_2, C_4 Capacitancias calibradas ajustables
Z Impedancia desconocida (inductiva o capacitiva)

INDUCTANCIA *L* DE BOBINAS CON NUCLEO DE AIRE

Cálculo de L a partir de la impedancia y la resistencia.

s 140 Se hace pasar una densidad de corriente ($J = I/A \cong 3\ \text{A/mm}^2$) y se mide la tensión terminal U, la corriente I y la potencia activa P.

s 141 Impedancia $Z = \dfrac{U}{I}$ Resistencia $R = \dfrac{P}{I^2}$



s 142 $$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z^2 - R^2}$$



Cálculo de L para una bobina toroidal (de anillo)

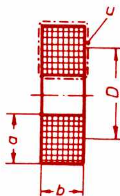


s 143 $$L = \frac{\mu_0\, h\, N^2}{2\,\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Cálculo de L para una bobina de disco con sección rectangular

	$\dfrac{D}{u}$	Inductancia
s 144	< 1	$L = 1.05\left(\dfrac{D}{m}\right) N^2 \sqrt[4]{\left(\dfrac{D}{u}\right)^3}\ \mu\text{H}$
s 145	> 1	$L = 1.05\left(\dfrac{D}{m}\right) N^2 \sqrt{\left(\dfrac{D}{u}\right)}\ \mu\text{H}$
s 146	$\geqq 3$	Los valores ya no son aceptables
		$1\,\mu\text{H} = 10^{-6}\,\dfrac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}$





- a Ancho radial de la bobina
- A Area transversal del conductor
- b Grueso axial de la bobina
- d_e Diámetro exterior del conductor con aislamiento
- D Diámetro medio de la bobina
- l_i Longitud del contorno interior del hueco
- s 147 l_m Longitud media del enrollamiento ($l_m = l_i + \pi a$)
- N Número de espiras o vueltas
- p Perímetro de la sección transversal de la bobina
- α Relación $a : b$



- s 148 β Grado de aflojamiento en la bobina $\left(\beta = \dfrac{a\,b}{N\,d_e^2}\right)$

CALCULO DE BOBINAS CON NUCLEO DE AIRE PARA UNA INDUCTANCIA DADA

Bobinas de alta frecuencia

	$\frac{D}{u}$	Fórmula
s 149	< 1	$\left(\frac{D}{m}\right)^{3.5} \cdot N^{3.25} \cong \frac{1}{39}\left(\frac{d_0}{m}\right)^{1.5} \cdot \left(\frac{L}{H}\right)^{2} \times 10^{14}$
s 150	> 1	$\left(\frac{D}{m}\right)^{3} \cdot N^{3.5} \cong \frac{1}{55}\left(\frac{d_0}{m}\right) \cdot \left(\frac{L}{H}\right)^{2} \times 10^{14}$

donde:

$$d_0 = \frac{u}{2\sqrt{N}} = d_e\,(1+\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Bobinas de baja frecuencia

s 151 Suponiendo que $\beta = 1$ y $D = u$, entonces

s 152 $$N \cong 975\sqrt{\left(\frac{L}{H}\right)\left(\frac{m}{D}\right)}$$

s 153 $$a = \frac{1}{4}\left(u \pm \sqrt{u^2 - 16\,N\,d_e^2}\right); \quad b = \frac{u}{2} - a$$

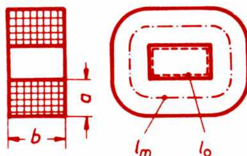
Cálculo del número de espiras de una bobina

A partir de la sección transversal de la bobina:

s 154 $$N \cong \frac{a\,b}{d_e^2}$$

A partir de la resistencia:

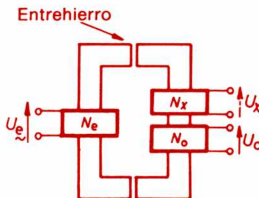
s 155 $$N \cong \frac{R\,A}{\rho\,l_m}$$



Mediante una bobina patrón o de referencia.

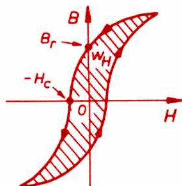
Se coloca la bobina con el número desconocido de espiras N_X y la bobina con número conocido de vueltas N_0, lo más cerca posible una de otra sobre un marco de acero, como se indica. El sistema se energiza o excita con una bobina magnetizante N_e de CA, a la que se aplica la tensión U_e. Se miden las tensiones U_X y U_0 con voltímetro de alta impedancia. De manera que

s 156 $$N_X = N_0\,\frac{U_X}{U_0}$$



Ver símbolos en página S 21.

HISTERESIS MAGNETICA



Inducción magnética remanente B_r

Magnetismo que permanece en el material (hierro o acero) cuando desaparece la intensidad magnética externa aplicada H.

Intensidad magnética coercitiva H_c

Campo que debe aplicarse para anular la inducción magnética B_r.

Trabajo de magnetización W_H (energía disipada por histéresis)

Al describir una sola vez el ciclo de histéresis se disipa una energía W_H igual al producto del área del ciclo de histéresis w_H y el volumen de la muestra de hierro, V_{Fe}:

s 157 $$W_H = w_H V_{Fe}$$

Potencia de magnetización P_H (potencia disipada por histéresis)

s 158 $$P_H = W_H f = w_H V_{Fe} f$$

Corrientes parásitas o de Foucault

Por la inducción electromagnética debida al cambio de flujo también se originan tensiones alternas en el hierro que, dependiendo de la conductividad eléctrica del material, producen unas corrientes turbulentas llamadas parásitas o de Foucault. La construcción laminar de los núcleos y las armaduras (con láminas de acero de 0.3 a 1 mm de espesor y aisladas entre sí) las reduce en alto grado.

Pérdidas magnéticas (en el hierro)

Potencia disipada en el hierro por unidad de masa p_{Fe}

Comprende las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas. Se mide con una amplitud de la inducción $B_m = 1\ \mathrm{T} = 10\ \mathrm{kGs}$, o bien, $1.5\ \mathrm{T} = 15\ \mathrm{kGs}$, a una frecuencia de 50 Hz, lo que da las cantidades p_{Fe10} o p_{Fe15}, respectivamente. Los valores pueden verse en Z 4.

Potencia total de pérdidas en el hierro P_{Fe}



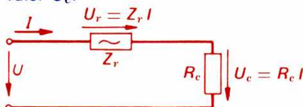
s 159 $$P_{Fe} = p_{Fe10} \left[\left(\frac{B_m}{\mathrm{T}} \right) \frac{f}{(50\ \mathrm{Hz})} \right]^2 m_{Fe} (1 + x)$$

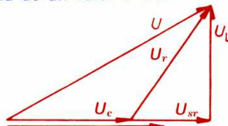
m_{Fe}	Masa del material magnético (hierro)	x	Aumento por rebordes del troquelado, etc. (0.1 a 1.0)

REACTOR O BOBINA DE REACTANCIA

Impedancia reductora de tensión

Se emplea un reactor en el circuito de una carga puramente resistiva R_c para reducir la tensión de entrada de un valor U a un valor U_c.





s 160	Impedancia del	reactor	$Z_r = \sqrt{R_s^2 + (\omega L_s)^2}$
s 161		circuito total	$Z = \sqrt{(R_s + R_c)^2 + (\omega L_s)^2}$



s 162 Inductancia requerida

$$L_s = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U\,R_c}{U_c}\right)^2 - (R_c + R_s)^2}$$

Para un cálculo aproximado de L_s se puede despreciar la resistencia aún desconocida R_s del reactor. Una vez diseñada la bobina, se conocerá R_s y podrá calcularse Z con precisión. Luego se revisa U_c empleando la fórmula



s 163

$$U_c = \frac{U\,R_c}{Z}$$

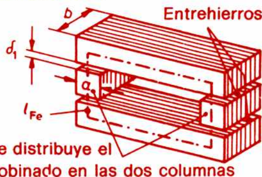
Eventualmente se requerirá un segundo cálculo con el valor modificado de la inductancia requerida.

Reactor sin núcleo de hierro y con inductancia constante

El diseño se efectúa según S 21. Se suponen inicialmente los valores de r_2, r_1 (bobina toroidal), o de D, u (bobina de disco). Si el espacio disponible para las bobinas resulta insuficiente o se obtiene un número inadecuado de espiras o un calibre impropio, deben repetirse los cálculos con otras dimensiones. Finalmente se calcula la resistencia de la bobina mediante s 26.

Reactor con núcleo de hierro e inductancia constante

El núcleo de hierro sirve fundamentalmente para confinar el flujo magnético y debe tener el mayor número posible de entrehierros simples, δ_1. Estos deben llenarse con aislante y su espesor total no debe ser mayor que 1 cm. La fuerza magnetomotriz (FMM) requerida por el hierro puede despreciarse. Los cálculos se realizan con los valores máximos de H y de B.



(Continúa en S 25)

Una medida de la variación de la inductancia L_s es la máxima variación relativa de la inductancia dependiente de la corriente:

s 164
$$g_L = \frac{|L_{R\,tot.} - L_s|}{L_s}; \qquad \frac{1}{g_L} = \frac{A_{Fe}\, B_{m(Fe)}\, \delta}{H_{m(Fe)}\, l_{Fe}\, \mu_0\, A_E} + 1$$

Si $g_L > g_{L\,(req.)}$ repítase el diseño aumentando A_{Fe} y disminuyendo $B_{m(Fe)}$, pero manteniendo constante el producto $A_{Fe}\, B_{m(Fe)}$.

Dimensionamiento. Dados: L_s, f, $g_{L(req.)}$, $U_{L(ef.)}$ o $I_{ef.}$ entonces se obtienen las siguientes:

			Dimensiones provisionales	Dimensiones definitivas
s 165 s 166	Sección efectiva del núcleo de hierro		$A_{Fe}' = \sqrt{K\, I_{ef.}\, U_{Lef.}}$ donde $I_{ef.} = \frac{U_{Lef.}}{2\pi f L_s}$	A_{Fe} (obtener de DIN 41 302)
s 167	Número de espiras		$N = \frac{U_{Lef.}}{4.44\, f\, B_{mFe}\, A_{Fe}}$	
s 168	Area de entrehierro		$A_E' = ab + (5\text{ cm})(a+b)$	$A_E = a\,b + 5\,(a+b)\,\delta_1$
s 169	Longitud del entrehierro	total	$\delta' = \frac{N^2 \mu_0 A_E'}{L_s}$	$\delta = \frac{a\,b\,n\,N^2 \mu_0}{n\,L_s - 5\,N^2 \mu_0 (a+b)}$
s 170		individual	$\delta_1' = \delta'/n < 1\text{ cm}$	$\delta_1 = \delta/n < 1\text{ cm}$
s 171	Diámetro del conductor		$d' = 2\sqrt{\frac{I}{J'\,\pi}}$	d al valor estándar siguiente d_e incluye el aislamiento
s 172	Area transversal del bobinado		$A_B = 1.12\, d_e^2\, N$	
	Longitud de las columnas del núcleo		Determínese l_c a partir de las dimensiones del núcleo y de A_B.	

Bobina de reactancia con núcleo de hierro e inductancia dependiente de la corriente. Esta bobina cuenta con un núcleo de acero, pero no tiene entrehierro. Sólo se emplea para fines especiales, por ejemplo, como amplificador magnético.

K Coeficiente de potencia de la bobina:
$\cong 0.24\text{ cm}^4/\text{VA}$ para bobinas comunes (en aire)
$\cong 0.15\text{ cm}^4/\text{VA}$ para bobinas en aceite
} Ver S 24 para la forma de sección del núcleo
para la forma de sección del núcleo ▯▯ aplicar valores 75% mayores

J' Densidad provisional de corriente:
para bobinas comunes $J' = 2\text{ A/mm}^2$
para bobinas en aceite $J' \cong 3$ a 4 A/mm^2

$B_{m(Fe)}$ Inducción en el hierro (alrededor de 1 a 1.2 T)

$H_{m(Fe)}$ Intensidad de campo en el hierro para $B_{m(Fe)}$. Según el tipo de hierro debe obtenerse de Z 3.

n Número de entrehierros. Su aumento reduce el flujo de dispersión

R_{Cu} Resistencia del bobinado (según s 26)

R_s Resistencia de la bobina, incluyendo pérdidas en el hierro ($R_s \cong 1.3\, R_{Cu}$)

l_{Fe} Longitud media de la trayectoria de flujo en el núcleo de hierro

TRANSFORMADOR

Designación de los bobinados

Clasificación según

la tensión nominal		la función en el circuito (sentido de la transmisión de energía)	
Bobinado con tensión nominal		Bobinado que	
mayor	menor	recibe energía	entrega energía
Alto voltaje	Bajo voltaje	Primario (Indice 1)	Secundario (Indice 2)

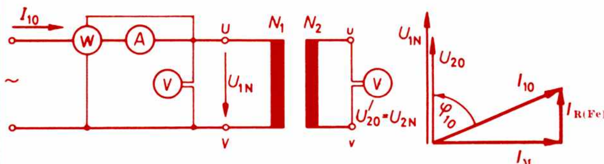
Datos nominales (índice N)

s 173 Capacidad (VA) $P_{aN} = U_{1N} \cdot I_{1N} = U_{2N} \cdot I_{2N}$

s 174 Relación de transformación $n = U_{1N}/U_{20} = I_{2N}/I_{1N}$

Como tensión nominal secundaria U_{2N} no se toma la correspondiente a carga nominal sino la de vacío, es decir, $U_{2N} = U_{20}$.

Pérdidas en el hierro P_{Fe} y prueba de vacío (circuito abierto)



Las pérdidas en el hierro P_{Fe} dependen sólo de la tensión primaria U_1 y de la frecuencia f, pero no de la carga.

s 175 $$P_{10} = P_{Fe}$$

Dichas pérdidas en el hierro, así como la relación nominal de transformación n, se determinan mediante una prueba de vacío. (Ver el diagrama de conexiones, secundario abierto, datos con el índice 0). La componente activa $I_{R(Fe)}$ de la corriente primaria corresponde a las pérdidas en el hierro; la componente reactiva es la corriente de magnetización I_M. Las pérdidas en el cobre son despreciables. Las pérdidas en el hierro P_{Fe} se utilizan para calcular las pérdidas en operación normal y la eficiencia.

TRANSFORMADOR

Pérdidas en el cobre P_{Cu} y prueba de corto circuito

Conexiones

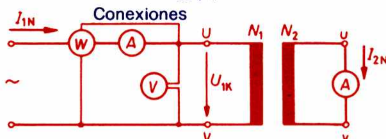
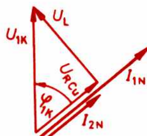


Diagrama fasorial



El valor de P_{Cu} sólo depende de la corriente primaria I_1 y se determina mediante una prueba de cortocircuito (ver el diagrama de conexiones, datos con el índice K). En esta prueba con el secundario en corto se ajusta la tensión primaria U_1 al valor U_{1K}, con el cual se hacen circular por los bobinados sus corrientes nominales; U_{1K} es tan pequeña que pueden despreciarse los valores de $I_{R(Fe)}$ e I_M. La potencia primaria de cortocircuito P_{1K} resulta entonces igual a la pérdida nominal total en los dos bobinados, P_{CuN}, a las corrientes nominales. Ese valor se emplea en el cálculo de las pérdidas de operación y de la eficiencia.

s 176 $$P_{1K} = P_{CuN}$$

Con los valores medidos se determina la relación de cortocircuito, que se indica a veces en la placa de transformadores grandes.

s 177 $$r_K = 100\,(U_{1K}/U_{1N})\ \%.$$

Del diagrama fasorial se obtienen:

s 178 $$R_{Cu} = U_R/I_{1N}\,;\ L = U_L/\omega I_{1N}\,; \quad \cos\phi_{1K} = U_R/U_{1K} = \frac{P_{CuN}}{r_K\,P_{aN}}$$

Comportamiento en operación

Para determinar la tensión secundaria de trabajo U_2 para cada caso de carga, se refieren primero todas las cantidades secundarias a las de un transformador de igual capacidad, pero con una relación de transformación $n = 1:1$ (valores con la marca ')

Circuito equivalente simplificado

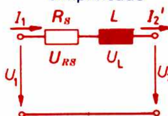
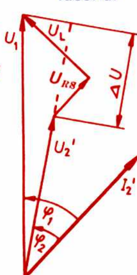


Diagrama fasorial



s 179 $U_2' = n\,U_2$; $\quad I_2' = I_2'/n$; $\quad R_2' = n^2\,R_2$

Cambio ΔU de U_2' dependiente de la carga (Aproximación para $r_K = 4\%$)

s 180 $\Delta U \cong U_{1K}\,(\cos\phi_{1K}\cos\phi_2 + \operatorname{sen}\phi_{1K}\operatorname{sen}\phi_2)\,I_2/I_{2N}$

Tensión secundaria U_2

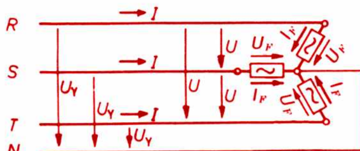
s 181 $U_2' \cong U_1 - \Delta U\,;\qquad U_2 = U_2'/n$

CONEXIONES TRIFASICAS

Estrella (Y)

s 182 $U = U_F\sqrt{3}$

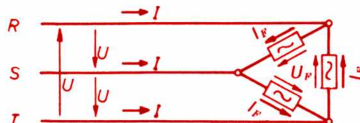
s 183 $I = I_F$



Delta (Δ)

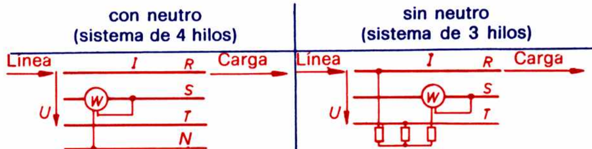
s 184 $U = U_F$

s 185 $I = I_F\sqrt{3}$



Medición de potencia trifásica

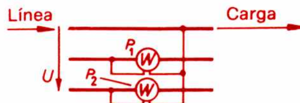
Cargas simétricas (equilibradas)



s 186 Potencia total $P = 3\,P_F = \sqrt{3}\,U\,I\cos\phi$

Cargas asimétricas (desequilibradas). Método de Aron. Con dos wattímetros.

De aplicación general y para redes con neutro y sin neutro.



s 187 Potencia total $P = P_1 + P_2$

I_F	Corriente de fase	U_F	Tensión de fase
I	Corriente de línea	U	Tensión entre líneas

R, S, T Conductores principales de línea (o bien: L_1, L_2, L_3)

N Hilo de neutro (o punto común)

P_F Potencia de fase (activa)

CALCULO DE POTENCIAS TRIFASICAS



Para cargas simétricas:

s 188 Potencia reactiva $P_r = \sqrt{3}\, U\, I \operatorname{sen} \phi$

s 189 Potencia activa $P = \sqrt{3}\, U\, I \cos \phi$

s 190 Factor de potencia $\cos \phi = \dfrac{P}{\sqrt{3}\, U\, I}$

Corrección del factor de potencia (FP) (en el caso de cargas inductivas)

Generalidades

Para reducir las pérdidas y el costo de la energía consumida puede mejorarse el FP hasta un valor de 95% aproximadamente. En el caso de cargas grandes la corrección debe hacerse directamente en cada carga. Tratándose de cargas pequeñas la corrección se hará en la subestación o centro de distribución.

Cálculo de la potencia capacitiva (en VAr) necesaria

El FP se calcula por medio de s 107 o s 190. La potencia se determina con wattímetros (ver las conexiones en S 28) o con un watthorímetro.



s 191 Potencia capacitiva necesaria $P_r = (\tan \phi_1 - \tan \phi_2)\, P$

s 192 Pérdidas en el equipo corrector de FP $p_c \cong 0.003\, P_r$

Tabla de valores para la corrección del FP

$\cos \phi$	$\tan \phi$	$\cos \phi$	$\tan \phi$	$\cos \phi$	$\tan \phi$	$\cos \phi$	$\tan \phi$
0.42	2.161	0.62	1.265	0.81	0.724	0.91	0.455
0.44	2.041	0.64	1.201	0.82	0.698	0.92	0.426
0.46	1.931	0.66	1.138	0.83	0.672	0.93	0.395
0.48	1.827	0.68	1.078	0.84	0.646	0.94	0.363
0.50	1.732	0.70	1.020	0.85	0.620	0.95	0.329
0.52	1.643	0.72	0.964	0.86	0.593	0.96	0.292
0.54	1.559	0.74	0.909	0.87	0.567	0.97	0.251
0.56	1.479	0.76	0.855	0.88	0.540	0.98	0.203
0.58	1.405	0.78	0.802	0.89	0.512	0.99	0.142
0.60	1.333	0.80	0.750	0.90	0.484	1	0.000

Los valores de $\tan \phi_1$ y $\tan \phi_2$ se obtienen correlativamente de la tabla anterior donde $\cos \phi_2$ es el FP deseado y $\cos \phi_1$ es el FP real de la carga.

LA MAQUINA DE CORRIENTE CONTINUA

Dínamo (motor o generador)

Generalidades

s 193 Constante del momento de rotación $C_M = \dfrac{p\,z}{2\,\pi a}$

s 194 Tensión inducida en la armadura (FEM) $\mathscr{E}_a = C_M \Phi \omega = 2\pi\, C_M \Phi n$

s 195 Momento de rotación $M = C_M \Phi I_a$

s 196 Corriente de armadura $I_a = \dfrac{\pm (U - \mathscr{E}_a)}{R_a}$ *

s 197 Tensión terminal $U = \mathscr{E}_a \pm I_a R_a$ *

s 198 Velocidad de rotación (rps) $n = \dfrac{U \mp I_a R_a}{2\pi C_M \Phi}$ **

s 199 Potencia interior $P_i = M_i\, \omega = \mathscr{E}_a I_a$

s 200 Potencia mecánica	recibida por el generador	$P_G = \dfrac{1}{\eta} U I_{tot.}$
s 201	entregada por el motor	$P_M = \eta\, U I_{tot.}$

Motor con excitación "shunt"
(Ver el diagrama de conexiones en S 31)
Buen arranque, la velocidad permanece casi constante con carga, y dentro de ciertos límites, puede ajustarse con facilidad.

Motor con excitación en serie
(Ver el diagrama de conexiones en S 31)
Buen arranque con alto par inicial. La velocidad depende de la carga. Sin carga, existe el peligro de desbocar la máquina.

Motor con excitación "compound"
(Ver el diagrama de conexiones en S 31)
Trabaja aproximadamente como un motor "shunt". El bobinado serie garantiza un alto par de arranque.

a	Número de pasos en paralelo en la armadura	z	Número de conductores
p	Número de pares de polos	R_a	Resistencia de la armadura
Φ	Flujo magnético		

* El signo + corresponde a un motor
El signo − corresponde a un generador

** El signo − corresponde a un motor
El signo + corresponde a un generador

MAQUINAS DE CC CON POLOS DE CONMUTACION

		Motores		Generadores	
	Rotación	A la derecha	A la izquierda	A la derecha	A la izquierda
s 202	Excitación "shunt"				
s 203	Excitación en serie				
s 204	Excitación "compound"				

MOTORES DE CA TRIFASICOS

Velocidad de sincronismo

Según el número p de pares de polos y la frecuencia f (en Hz), se tiene

s 205 Velocidad de sincronismo $n_s = \frac{f}{p} = \frac{60\,f}{p}$ (en rpm)

Conexión

Si todas las terminales del devanado del estator se llevan al tablero de conexiones, entonces el motor puede conectarse en delta o en estrella.

	Tensión por fase en estrella	en delta
s 206	$U_F = \frac{U}{\sqrt{3}}$	$U_F = U$

Un motor con la designación 660/380 V opera con sus valores nominales de corriente, par y potencia conectado a una tensión

s 207 $U = 380$ V en Δ; entonces $U_F = 380$ V

s 208 $U = 660$ V en Y; entonces $U_F = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{660}{\sqrt{3}} = 380$ V

Conexión delta-estrella

Los motores de altas potencias operan generalmente en delta. Para evitar corrientes excesivas de arranque, en redes de baja potencia se les arranca conectados en estrella, y posteriormente se operan en delta. Si, por ejemplo, un motor con tensión nominal de 660/380 V se arranca en estrella conectado a una red de 380/220 V, entonces se le aplica por fase $1/\sqrt{3}$ de su tensión nominal.

Motor asíncrono (o de inducción)

En el devanado del rotor se inducen tensiones y corrientes por el campo magnético giratorio producido por la corriente en el estator, por lo cual se le denomina también motor de inducción. La velocidad de operación es aproximadamente de 3% a 5% (deslizamiento) menor que la del campo giratorio (velocidad de sincronismo). Con carga su velocidad permanece constante.

Motor síncrono

Requiere corriente continua para su excitación. Se arranca con ayuda de su devanado amortiguador (de jaula) hasta alcanzar la velocidad de sincronismo. Puede funcionar también reversiblemente como generador síncrono o alternador.

GRUPOS DE CONEXIONES

	Designación: Indice	Designación: Grupo	Fases: AV	Fases: BV	Conexiones: AV	Conexiones: BV	Relación (ratio) $U_1 : U_2$
	Transformadores trifásicos						
s 209	0	D d 0					$\frac{N_1}{N_2}$
s 210	0	**Y y 0**					$\frac{N_1}{N_2}$
s 211	0	D z 0					$\frac{2\,N_1}{3\,N_2}$
s 212	5	**D y 5**					$\frac{N_1}{\sqrt{3}\,N_2}$
s 213	5	**Y d 5**					$\frac{\sqrt{3}\,N_1}{N_2}$
s 214	5	**Y z 5**					$\frac{2\,N_1}{\sqrt{3}\,N_2}$
s 215	6	D d 6					$\frac{N_1}{N_2}$
s 216	6	Y y 6					$\frac{N_1}{N_2}$
s 217	6	D z 6					$\frac{2\,N_1}{3\,N_2}$
s 218	11	D y 11					$\frac{N_1}{\sqrt{3}\,N_2}$
s 219	11	Y d 11					$\frac{\sqrt{3}\,N_1}{N_2}$
s 220	11	Y z 11					$\frac{2\,N_1}{\sqrt{3}\,N_2}$
	Transformadores monofásicos						
s 221	0	I i 0					$\frac{N_1}{N_2}$

AV Alto voltaje
BV Bajo voltaje

D / d Delta   Y / y Estrella   — / z Zigzag

El índice sirve para calcular el defasamiento (ϕ = Indice × 30°) entre la conexión de AV y la de BV. Por ejemplo, el defasamiento para el grupo *D y* 5 es $\phi = 5 \times 30° = 150°$.

Nota: Los grupos enmarcados son preferibles.

Símbolo	Tipo de dispositivo	Construcción	Cantidad primaria medida	Escala	Para medir	
	Bobina móvil	Bobina móvil en el campo radial uniforme de un imán permanente; dos resortes espirales o de torsión como conexiones y para el contramomento torsional	Valor continuo (media aritmética)	Lineal	—	I y U
	Bobina móvil con rectificador		Valor continuo (rectificador)	≅ Lineal	~ [1]	I y U
	Bobinas en cruz	Bobinas perpendiculares, rígidamente unidas, en el campo no uniforme de un imán permanente; dos conexiones sin contrapar o contramomento	$\frac{I_1}{I_2}$	No lineal	— ~ [2]	$\frac{I_1}{I_2}$
	Bobina móvil con termopar	El alambre calefactor del termopar, soldado o en estrecho contacto. La tensión termoeléctrica alimenta la bobina móvil	Valor eficaz	Casi cuadrática	— ~ [2] [3]	I y U
	Hierro dulce	Dos piezas de hierro dulce, una móvil y una fija; bobina fija y resortes espirales para el contramomento	Valor eficaz	No lineal	— ~ [2] [4]	I y U
	Electrodinámico	Bobina móvil, bobina fija y dos resortes espirales o de torsión para el contramomento y la conexión; pantalla magnética	$I_1 \cdot I_2 \cos \phi$	Cuadrática para I y U; lineal para P	— ~ [2]	I, U, P y $\cos \phi$
	Electrostático	Una placa fija y una móvil en el condensador	Valor eficaz	No lineal	— ~ [2]	U (desde 100 V)

[1] Sólo para cantidades alternas senoidales
[3] También para altas frecuencias
[2] También para cantidades alternas no senoidales
[4] $f < 500$ Hz

Iluminación. Fotometría

CANTIDADES BASICAS EN LUMINOTECNIA

	Magnitud	Símbolos y relaciones	Unidad	Explicación
t 1	Intensidad luminosa	I_v	candela cd	I_v es una magnitud fundamental. Ver Explicaciones generales.
t 2	Angulo sólido	Ω $= \frac{A_s}{r_s^2}$	estereorradián $\text{sr} = \frac{1\ \text{m}^2}{1\ \text{m}^2}$	Ω es la relación del área A_s de la superficie esférica interceptada, al cuadrado del radio de la esfera r_s. Para un ángulo sólido completo se tiene $\Omega = 4\pi\ \text{sr} = 12.56\ \text{sr}$
t 3	Flujo lumínico (potencia lumínica)	$\Phi_v = \Omega\, I_v$	lumen $\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$	Φ_v es el producto del ángulo sólido Ω y la intensidad luminosa I_v
t 4	Cantidad de luz (energía lumínica)	$Q_v = \Phi_v\, t$	lumen-segundo $\text{lm} \cdot \text{s}$	Q_v es el producto del flujo lumínico y el intervalo de tiempo t
t 5	Iluminación	E_v $= \frac{I_v \cos\alpha}{r^2}$	lux $\text{lx} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$	E_v es el cociente del flujo lumínico incidente y la superficie iluminada $A = A_k/\cos\alpha$
t 6	Luminosidad (brillo)	L_v $= \frac{I_v}{A_1 \cos\epsilon}$	$\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$	L_v es la relación de la intensidad luminosa I_v a la proyección de la superficie iluminada sobre un plano perpendicular a la dirección a los rayos.

Flujo lumínico requerido para la iluminación (Ver valores en Z 21)

Una superficie A sobre la que hay una iluminación E_v requiere un flujo lumínico

t 7 $$\Phi_v = \frac{A\, E_v}{\eta}$$

Equivalente fotométrico de la radiación

t 8 1 watt = 680 lm a una longitud de onda de 0.555 μm

Definición de la unidad fundamental candela

Un radiador perfecto (cuerpo negro) con una superficie de $1/(6 \times 10^5)\ \text{m}^2$ tiene a una temperatura de 2 043 K una intensidad luminosa de 1 candela.

Ver los símbolos en T 2

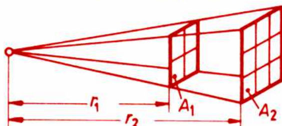
Optica e Iluminación

Iluminación. Refracción

T 2

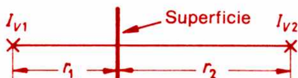
LEY DE LA ILUMINACION

La iluminación de una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a la fuente de luz:



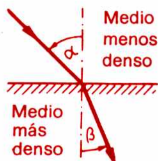
t 9 $$\frac{E_{v1}}{E_{v2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Para igual iluminación de una superficie las intensidades de dos fuentes de luz están en relación directa al cuadrado de sus distancias a la superficie:



t 10 $$\frac{I_{v1}}{I_{v2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Refracción de la luz



t 11 $$\frac{n_b}{n_a} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \text{constante para todo ángulo}$$

t 12 cuando $\text{sen}\,\beta \geqq \frac{n_a}{n_b}$, hay reflexión total

t 13 Indices de refracción (para luz amarilla de sodio, $\lambda = 589.3$ nm)

Sólidos (con relación al aire)		Líquidos (con relación al aire)		Gases (con relación al vacío)	
Plexiglass	1.49	Agua	1.33	Hidrógeno	1.000139
Cuarzo	1.54	Alcohol	1.36	Oxígeno	1.000271
Vidrio (crown)	1.56	Glicerina	1.47	Aire	1.000292
Diamante	2.41	Benzol	1.50	Nitrógeno	1.000297

A Superficie iluminada
A_1 Superficie luminosa
α Angulo entre el rayo incidente y la perpendicular a la superficie iluminada A
ϵ Angulo entre el rayo emitido y la perpendicular a la superficie luminosa A_1
n_a Indice de refracción del medio menos denso
n_b Indice de refracción del medio más denso
r Distancia entre la fuente luminosa y la superficie iluminada
η Eficiencia de la iluminación (Ver tabla Z 21)
$c \cong 3 \times 10^8$ m/s (velocidad de la luz)

Optica e Iluminación — T 3

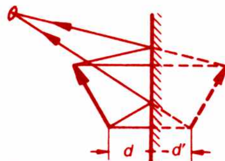
Longitudes de onda. Espejos

LONGITUD DE ONDA EN AIRE ATMOSFERICO

		Tipo de radiación	Longitud de onda λ
t 14	Rayos X	duros	0.0057 — 0.08 nm
		suaves	0.080 — 2.0 nm
		ultrasuaves	2.0 — 37.5 nm
t 15	Luz y adyacentes	ultravioleta, corta	100 — 280 nm
		ultravioleta, larga	280 — 380 nm
		violeta	315 — 380 nm
		azul	380 — 420 nm
		verde	420 — 490 nm
		amarilla	490 — 530 nm
		roja	530 — 650 nm
		infrarroja	650 — 780 nm

t 16 Longitud de onda $\lambda = \frac{c}{f}$

Espejos

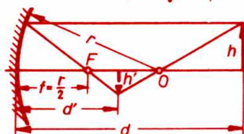


Espejo plano

La imagen es virtual, derecha y está a una distancia (d') numéricamente igual a la del objeto (d):

t 17 $d = -d'$

Espejo cóncavo



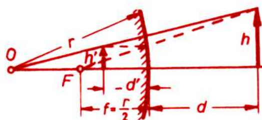
t 18 $$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

La imagen será real o virtual dependiendo de la distancia del objeto:

d	d'	Imagen
∞	f	puntiforme
$> 2f$	$f < d' < 2f$	real, invertida, menor
$2f$	$2f$	real, invertida, igual tamaño
$2f > d > f$	$> 2f$	real, invertida, mayor
f	∞	nula
$< f$	negativa	virtual, derecha, mayor

Espejo convexo

Sólo produce imágenes virtuales, derechas y menores. Similar al espejo cóncavo con $f = -\frac{r}{2}$.



Ver símbolos en T4

Optica e Iluminación

Lentes

LEYES DE LAS LENTES

Potencia (o poder refractivo) δ de una lente

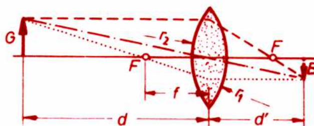
t 19 $$\delta = \frac{1}{f}$$ Unidad: dioptría (dpt) $= \frac{1}{\text{m}}$

Fórmula de las lentes delgadas

t 20 $$\frac{1}{f} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{d}$$

t 21 $$= (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

t 22 $$m = \frac{h'}{h} = \frac{d'}{d}$$

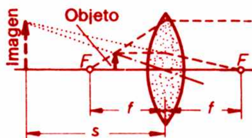


Si dos lentes con distancias focales f_1 y f_2 están inmediatamente una a continuación de la otra, la distancia focal total es

t 23 $$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Lupa o lente de aumento

En general	con el objeto en el foco
t 24 $m = \frac{s}{f} + 1$	$m = \frac{s}{f}$

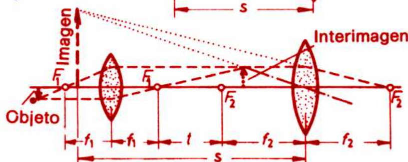


Microscopio

Ampliación total

t 25 $$m = \frac{t\,s}{f_1\,f_2}$$

t 26 $$= m_1\,m_2$$



Macrofotografía

t 27 Extensión de cámara $a = f\,(m+1)$

t 28 Distancia del objeto $c = \frac{a}{m} = f\,(1 + \frac{1}{m})$

F	Foco (o punto focal)	n	Indice de refracción (ver T 2)
f	Distancia focal	r	Radio de curvatura
d	Distancia del objeto	t	Longitud óptica de tubo
d'	Distancia de la imagen	m	Amplificación o aumento
h	Tamaño del objeto	s	Distancia visual normal (= 25 cm en el ojo normal)
h'	Tamaño de la imagen		

Química

Elementos

Nombre	Símbolo	Masa atómica (en uma)	Nombre	Símbolo	Masa atómica (en uma)
Aluminio	Al	26.9815	Manganeso	Mn	54.9381
Antimonio	Sb	121.75	Mercurio	Hg	200.59
Argón	Ar	39.948	Molibdeno	Mo	95.94
Arsénico	As	74.9216	Neodimio	Nd	144.240
Astato	At	210	Neón	Ne	20.183
Azufre	S	32.064	Niobio	Nb	92.906
Bario	Ba	137.34	Níquel	Ni	58.71
Berilio	Be	9.0122	Nitrógeno	N	14.0067
Bismuto	Bi	208.980	Oro	Au	196.967
Boro	B	10.811	Osmio	Os	190.2
Bromo	Br	79.909	Oxígeno	O	15.9994
Cadmio	Cd	112.40	Paladio	Pd	106.4
Calcio	Ca	40.08	Plata	Ag	107.870
Californio	Cf	251	Platino	Pt	195.09
Carbono	C	12.0112	Plomo	Pb	207.19
Cerio	Ce	140.12	Plutonio	Pu	242
Cesio	Cs	132.905	Potasio	K	39.102
Cloro	Cl	35.453	Praseodimio	Pr	140.907
Cobalto	Co	58.9332	Radio	Ra	226.04
Cobre	Cu	63.54	Renio	Re	186.2
Cromo	Cr	51.996	Rodio	Rh	102.905
Einsteinio	Es	254	Rubidio	Rb	85.47
Erbio	Er	167.26	Rutenio	Ru	101.07
Escandio	Sc	44.956	Samario	Sm	150.35
Estaño	Sn	118.69	Selenio	Se	78.96
Estroncio	Sr	87.62	Silicio	Si	28.086
Europio	Eu	151.96	Sodio	Na	22.9898
Flúor	Fe	18.9984	Talio	Tl	204.37
Fósforo	P	30.9738	Tantalio	Ta	180.948
Gadolinio	Gd	157.25	Telurio	Te	127.60
Galio	Ga	69.72	Titanio	Ti	47.90
Germanio	Ge	72.59	Torio	Th	232.038
Helio	He	4.0026	Tulio	Tm	168.934
Hidrógeno	H	1.008	Tungsteno	W	183.85
Hierro	Fe	55.847	Uranio	U	238.03
Indio	In	114.82	Vanadio	V	50.942
Iridio	Ir	192.2	Xenón	Xe	131.30
Kriptón	Kr	83.80	Yodo	I	126.9044
Lantano	La	138.91	Yterbio	Yb	173.04
Litio	Li	6.939	Ytrio	Y	88.905
Lutecio	Lu	174.970	Zinc	Zn	65.37
Magnesio	Mg	24.312	Zirconio	Zr	91.22

uma, u = Unidad de masa atómica (igual a 1/12 de la masa de un átomo del isótopo 12 del carbono, ^{12}C) (1 uma = 1.66×10^{-27} kg)

U 2 Química

Productos químicos

NOMBRE común	específico o comercial (sólo cuando difieran)	Fórmula
Acetileno		C_2H_2
Acetona	dimetilcetona	$(CH_3)_2 \cdot CO$
Acido cianhídrico	ácido prúsico	HCN
Acido clorhídrico		HCl
Acido fluorhídrico		HF
Acido fosfórico	ácido ortofosfórico	H_3PO_4
Acido nítrico		HNO_3
Acido sulfhídrico		H_2S
Acido sulfúrico	aceite de vitriolo	H_2SO_4
Agua		H_2O
Alcohol etílico	etanol	C_2H_5OH
Alcohol metílico	metanol	CH_3OH
Amoníaco		NH_3
Anilina	aminobenzol	$C_6H_5 \cdot NH_2$
Bauxita	óxido de aluminio	Al_2O_3*
Bórax	tetraborato de sodio	$Na_2B_4O_7$*
Bromuro de plata		$AgBr$
Bromuro de potasio		KBr
Cal viva	óxido de calcio	CaO
Cal apagada	hidróxido de calcio	$Ca(OH)_2$
Carbonato de calcio	caliza	$CaCO_3$
Carbonato de plomo	plomo blanco	$2PbCO_3 \cdot Pb(OH)_2$
Carbonato de sodio		Na_2CO_3*
Carbono		C
Carburo de calcio	carburo	CaC_2
Carburo de silicio	carburundum	SiC
Cianuro de potasio		KCN
Clorato de potasio		$KClO_3$
Cloruro de amonio	sal amoníaco	NH_4Cl
Cloruro de calcio		$CaCl_2$
Cloruro de estaño		$SnCl_2$*
Cloruro de hierro	cloruro ferroso	$FeCl_2$*
Cloruro de potasio		KCl
Cloruro de sodio	sal común	$NaCl$
Cloruro de zinc		$ZnCl_2$*
Cromato de potasio		K_2CrO_4
Dicromato de potasio		$K_2Cr_2O_7$
Dióxido de carbono	anhídrico carbónico	CO_2
Dióxido de manganeso	pirolusita	MnO_2
Eter etílico	éter	$(C_2H_5)_2O$

*Normalmente en solución acuosa

Química

Productos químicos

NOMBRE común	NOMBRE específico o comercial (sólo cuando difieran)	Fórmula
Fenol	ácido carbólico	C_6H_5OH
Ferricianuro de potasio		$K_3[Fe(CN)_6]$
Ferrocianuro de potasio		$K_4[Fe(CN)_6]$
Glicerina	trihidroxipropano	$C_3H_5(OH)_3$
Glicol		$CH_2OH\text{-}CH_2OH$
Grafito		C
Hidróxido de amonio		NH_4OH
Hipoclorito de calcio	polvo de blanquear	$CaOCl_2$
Magnesia	óxido de magnesio	MgO
Metano	gas de los pantanos	CH_4
Minio (plomo rojo)	óxido plumboso-plúmbico	Pb_3O_4
Nitrato de calcio		$Ca(NO_3)_2$
Nitrato de plata		$AgNO_3$
Nitrato de plomo		$Pb(NO_3)_2$
Oxido de estaño	óxido estannoso	SnO_2
Oxido de plomo	óxido plumboso	PbO
Oxido de manganeso	dióxido manganoso	MnO_2
Oxido de nitrógeno	gas hilarante	N_2O
Oxido de zinc	blanco de zinc	ZnO
Potasa	carbonato de potasio	K_2CO_3
Potasa caústica	hidróxido de potasio	KOH
Propano		C_3H_8
Sosa (soda)	óxido de sodio	Na_2O
Sosa caústica	hidróxido de sodio	$NaOH$
Sulfato de cadmio		$CdSO_4$
Sulfato de calcio		$CaSO_4$*
Sulfato de cobre	vitriolo azul	$CuSO_4$*
Sulfato de hierro	vitriolo verde	$FeSO_4$*
Sulfato de magnesio		$MgSO_4$*
Sulfato de sodio	sal de Glauber	Na_2SO_4*
Sulfato de zinc	vitriolo blanco	$ZnSO_4$*
Sulfuro de hierro	sulfuro ferroso	FeS
Sulfuro de mercurio	cinabrio	HgS
Sulfuro de plomo	sulfuro plumboso	PbS
Sulfuro de zinc	blenda	ZnS
Tetracloroetileno		C_2Cl_4
Tiosulfato de sodio		$Na_2S_2O_3$*
Tricloroetileno		C_2HCl_3
Urea	carbamida	$CO(NH_2)_2$
Yoduro de potasio		KI

* Normalmente en solución acuosa

Química

Valores pH. Indicadores

VALOR pH

El logaritmo decimal con signo negativo de la concentración de iones hidrógeno c_{H^+} es el valor pH de una sustancia:

$$pH = -\log_{10} c_{H^+}$$

c_{H^+}	1	10^{-1}	10^{-2}	. . .	10^{-7}	. . .	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
pH	0	1	2		7		12	13	14
	← ácida →				neutra	← alcalina →			

Indicadores ácido-base

Indicador	Intervalo del pH	Cambio de color
Azul de timol	1.2 - 2.8	rojo - amarillo
4-dimetilaminoazobenzol	2.9 - 4.0	rojo - amarillo naranja
Azul de bromofenol	3.0 - 4.6	amarillo - rojo violeta
Rojo congo	3.0 - 5.2	azul violeta - rojo naranja
Anaranjado de metilo	3.1 - 4.4	rojo - amarillo naranja
Verde de bromocreosol	3.8 - 5.4	amarillo - azul
Rojo de metilo	4.4 - 6.2	rojo - amarillo anaranjado
Tornasol	5.0 - 8.0	rojo - azul
Púrpura de bromocreosol	5.2 - 6.8	amarillo - púrpura
Rojo de bromofenol	5.2 - 6.8	anaranjado amarillo - púrpura
Azul de bromotimol	6.0 - 7.6	amarillo - azul
Rojo de fenol	6.4 - 8.2	amarillo - rojo
Rojo neutro	6.4 - 8.0	azul rojizo - anaranjado amarillo
Rojo de creosol	7.0 - 8.8	amarillo - púrpura
m-creosolpúrpura	7.4 - 9.0	amarillo - púrpura
Azul de timol	8.0 - 9.6	amarillo - azul
Fenolftaleína	8.2 - 9.8	sin color - rojo violeta
Amarillo de alizarina GG	10.0 - 12.1	amarillo claro - castaño amarillento

Química

Reactivos. Productos químicos. Mezclas frigoríficas

REACTIVOS

	Clase de sustancia	Indicador o reactivo	Cambio de color o efecto
u 2	Acido	papel tornasol azul	rojo
u 3		fenolftaleína roja	incoloro
u 4		anaranjado de metilo amarillo	rojo
u 5	Base	papel tornasol rojo	azul
u 6		fenolftaleína incolora	rojo
u 7		anaranjado de metilo rojo	amarillo
u 8	Ozono	papel con yoduro de potasio	azul - negro
u 9	Acido sulfhídrico	papel plomo	castaño - negro
u 10	Solución de amoniaco	ácido clorhídrico	vapores blancos
u 11	Dióxido de carbono	hidróxido de calcio	sedimentación

Obtención de productos químicos

	Producto a obtener	Reacción
u 12	Acido carbónico	$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow H_2CO_3 + CaCl_2$
u 13	Acido sulfhídrico	$FeS + 2HCl \rightarrow H_2S + FeCl_2$
u 14	Amoniaco	$CO(NH_2)^2 + H_2O \rightarrow 2NH_3 + CO_2$
u 15	Cloro	$CaO\,Cl_2 + 2HCl \rightarrow Cl_2 + CaCl_2 + H_2O$
u 16	Cloruro de amonio	$NH_4OH + HCl \rightarrow NH_4Cl + H_2O$
u 17	Hidrógeno	$H_2SO_4 + Zn \rightarrow H_2 + ZnSO_4$
u 18	Hidróxido de amonio	$NH_3 + H_2O \rightarrow NH_4OH$
u 19	Hidróxido de sodio	$Na_2O + H_2O \rightarrow 2NaOH$
u 20	Oxígeno	$2KClO_3 \xrightarrow{\Delta} 3O_2 + 2KCl$
u 21	Sulfuro de cadmio	$CdSO_4 + H_2S \rightarrow CdS + H_2SO_4$
u 22	Sulfuro de plomo	$Pb(NO_3)_2 + H_2S \rightarrow PbS + 2HNO_3$
u 23	Sulfuro de zinc	$ZnSO_4 + H_2S \rightarrow ZnS + H_2SO_4$

Preparación de mezclas frigoríficas

	Reducción de temperatura (°C)		Mezcla (los números indican proporciones en peso)
u 24	+ 10	− 12	$4\ H_2O + 1\ KCl$
u 25	+ 10	− 15	$1\ H_2O + 1\ NH_4NO_3$
u 26	+ 8	− 24	$1\ H_2O + 1\ NaNO_3 + 1\ NH_4Cl$
u 27	0	− 21	3.0 Hielo picado + 1 $NaCl$
u 28	0	− 39	1.2 Hielo picado + 2 $CaCl_2 \cdot 6H_2O$
u 29	0	− 55	1.4 Hielo picado + 2 $CaCl_2 \cdot 6H_2O$
u 30	+ 15	− 77	1 Metanol + CO_2 sólido (hielo seco)

U 6 Química

Humedecimiento y secado del aire. Dureza del agua

ESTABLECIMIENTO DE HUMEDAD CONSTANTE EN EL AIRE DE RECIPIENTES CERRADOS

Humedad relativa a 20°C (por encima de la superficie de la solución)	Solución acuosa saturada	
92 %	$Na_2CO_3 \cdot 10\ H_2O$	u 31
86	KCl	u 32
80	$(NH_4)_2SO_4$	u 33
76	$NaCl$	u 34
63	NH_4NO_3	u 35
55	$Ca(NO_3)_2 \cdot 4\ H_2O$	u 36
45	$K_2CO_3 \cdot 2\ H_2O$	u 37
35	$Ca\ Cl_2 \cdot 6\ H_2O$	u 38

Elementos secantes para desecadores

Agua residual después del secado a 25°C, mg/lit (aire)	Elemento secante		
	Nombre	Fórmula	
1.4	Sulfato de cobre, anhidro	$CuSO_4$	u 39
0.8	Cloruro de zinc, fundido	$ZnCl_2$	u 40
0.14 - 0.25	Cloruro de calcio, granulado	$CaCl_2$	u 41
0.16	Hidróxido de sodio	$NaOH$	u 42
0.008	Oxido de magnesio	MgO	u 43
0.005	Sulfato de calcio, anhidro	$CaSO_4$	u 44
0.003	Oxido de aluminio	Al_2O_3	u 45
0.002	Hidróxido de potasio	KOH	u 46
0.001	Oxido de silicio (Kieselgel)	$(SiO_2)_x$	u 47
0.000025	Pentóxido de fósforo	P_2O_5	u 48

Dureza del agua

1° en la escala alemana (*deutsche Härte*, dH)
= 10 mg (CaO)/litro (agua)

Intervalos de dureza (en dH)

0° - 4°	muy blanda	12° - 18°	algo dura	u 49
4° - 8°	blanda	18° - 30°	dura	u 50
8° - 12°	medio blanda	más de 30°	muy dura	u 51

Intercambiadores de iones para suavizar el agua

Zeolita: silicatos naturales de sodio y aluminio
Permutita: silicatos artificiales de sodio y aluminio
Wofatita: resinas orgánicas sintéticas

Tablas

Propiedades eléctricas

Z 1

RESISTIVIDAD ρ Y CONDUCTIVIDAD γ DE CONDUCTORES (A 20°C)

Material	ρ $\Omega \cdot mm^2/m$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	Material	ρ $\Omega \cdot mm^2/m$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$
Acero dulce	0.13	7.7	Latón Ms 63	0.071	14
Aluminio	0.0278	36	Magnesio	0.0435	23
Antimonio	0.417	2.4	Manganina	0.423	2.37
Cadmio	0.076	13.1	Mercurio	0.941	1.063
Carbón	40	0.025	Níquel	0.087	11.5
Cobre (eléc.)	0.0175	57	Niquelina	0.5	2.0
Constantan	0.48	2.08	Oro	0.0222	45
Cromo-Ni-Fe	0.10	10	Plata	0.016	62.5
Estaño	0.12	8.3	Plata alemana	0.369	2.71
Hierro fundido	1	1	Platino	0.111	9
Hierro (puro)	0.10	10	Plomo	0.208	4.8
Grafito	8.00	0.125	Tungsteno	0.059	17
Latón Ms 58	0.059	17	Zinc	0.061	16.5

RESISTIVIDAD ρ DE AISLANTES

Material	$\Omega \cdot cm$	Material	$\Omega \cdot cm$
Aceite de parafina	10^{18}	Mica	10^{17}
Agua de mar	10^{6}	Parafina (pura)	10^{18}
Agua destilada	10^{7}	Plexiglás	10^{15}
Ambar comprimido	10^{18}	Polistireno	10^{18}
Baquelita	10^{14}	Porcelana	10^{14}
Caucho (hule) duro	10^{16}	Tierra húmeda	10^{8}
Mármol	10^{10}	Vidrio	10^{15}

COEFICIENTE TERMICO DE RESISTENCIA α_{20} (A 20°C)

Material	($°C^{-1}$, K^{-1})	Material	($°C^{-1}$, K^{-1})
Acero dulce	+ 0.00660	Manganina	± 0.00001
Aluminio	+ 0.00390	Mercurio	+ 0.00090
Carbón	− 0.00030	Níquel	+ 0.00400
Cobre	+ 0.00380	Niquelina	+ 0.00023
Constantan	− 0.00003	Plata	+ 0.00377
Estaño	+ 0.00420	Plata alemana	+ 0.00070
Grafito	− 0.00020	Platino	+ 0.00390
Latón	+ 0.00150	Zinc	+ 0.00370

Tablas

Propiedades eléctricas

CONSTANTE DIELECTRICA ε_r

Material aislante	ε_r	Material aislante	ε_r	Material aislante	ε_r
Aceite de oliva	3	Caucho (*hule*) duro	4	Papel Kraft	4.5
Aceite de parafina	2.2	Caucho (*hule*) suave	2.5	Papel pescado	4
Aceite de ricino	4.7	Compuesto (*compound*)	2.5	Parafina	2.2
Aceite mineral p/transf.	2.2	Cuarzo	4.5	Petróleo	2.2
Aceite vegetal p/transf.	2.5	Ebonita	2.5	Pizarra	4
Agua	80	Esteatita	6	Plexiglás	3.2
Aire	1	Fibra vulcanizada	2.5	Poliamida	5
Aislam. p/cable alta tensión	4.2	Gutapercha	4	Polistireno	3
		Laca (*shellac*)	3.5	Porcelana	4.4
Aislam. p/cable telefónico	1.5	Mármol	8	Resina fenólica	8
		Mica	6	Teflón	2
Araldita	3.6	Micanita	5	Tela	4
Baquelita	3.6	Papel	2.3	Trementina (*aguarrás*)	2.2
Cartón comprimido	4	Papel impregnado	5	Vidrio	5

SERIE DE POTENCIALES ELECTROQUIMICOS

Diferencia de potencial referida a electrodo de hidrógeno

Material	Volts	Material	Volts	Material	Volts
Aluminio	−1.66	Hidrógeno	0.00	Platino	+1.20
Berilio	−1.85	Hierro	−0.41	Plomo	−0.13
Cadmio	−0.40	Magnesio	−2.37	Potasio	−2.93
Calcio	−2.87	Manganeso	−1.19	Sodio	−2.71
Cobalto	−0.28	Mercurio	+0.85	Tungsteno	−0.58
Cobre	+0.34	Níquel	−0.23	Zinc	−0.76
Cromo	−0.74	Oro	+1.50		
Estaño	−0.14	Plata	+0.80		

Números estandarizados mediante una razón progresiva de acuerdo con la serie E (Ejemplo para E 6 a E 24)

Serie E 6 ($\approx \sqrt[6]{10}$)			Serie E 12 ($\approx \sqrt[12]{10}$)			Serie E 24 ($\approx \sqrt[24]{10}$)		
1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7
						1.1	2.4	5.1
			1.2	2.7	5.6	1.2	2.7	5.6
						1.3	3.0	6.2
1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8
						1.6	3.6	7.5
			1.8	3.9	8.2	1.8	3.9	8.2
						2.0	4.3	9.1
10	22	47	10	22	47	10	22	47
	etc.			etc.			etc.	

INTENSIDAD DE CAMPO *H* Y PERMEABILIDAD RELATIVA μ_r EN FUNCION DE LA INDUCCION MAGNETICA *B* DESEADA

Inducción o densidad de flujo		Hierro fundido		Acero fundido y lámina tipo "dynamo" $p_{Fe10} = 3.6$ W/kg		Lámina de acero aleado $p_{Fe10} = 1.3$ W/kg	
B		*H*	μ_r	*H*	μ_r	*H*	μ_r
tesla ($T = V \cdot s/m^2$)	gauss (Gs)	A/m		A/m		A/m	
0.1	1 000	440	181	30	2 650	8.5	9 390
0.2	2 000	740	215	60	2 650	25	6 350
0.3	3 000	980	243	80	2 980	40	5 970
0.4	4 000	1 250	254	100	4 180	65	4 900
0.5	5 000	1 650	241	120	3 310	90	4 420
0.6	6 000	2 100	227	140	3 410	125	3 810
0.7	7 000	3 600	154	170	3 280	170	3 280
0.8	8 000	5 300	120	190	3 350	220	2 900
0.9	9 000	7 400	97	230	3 110	280	2 550
1.0	10 000	10 300	77	295	2 690	355	2 240
1.1	11 000	14 000	63	370	2 360	460	1 900
1.2	12 000	19 500	49	520	1 830	660	1 445
1.3	13 000	29 000	36	750	1 380	820	1 260
1.4	14 000	42 000	26	1 250	890	2 250	495
1.5	15 000	65 000	18	2 000	600	4 500	265
1.6	16 000			3 500	363	8 500	150
1.7	17 000			7 900	171	13 100	103
1.8	18 000			12 000	119	21 500	67
1.9	19 000			19 100	79	39 000	39
2.0	20 000			30 500	52	115 000	14
2.1	21 000			50 700	33		
2.2	22 000			130 000	13		
2.3	23 000			218 000	4		

——— Límite práctico

Tablas

Propiedades magnéticas

VALORES PARA LAMINA TIPO "DYNAMO" (DE LA NORMA DIN 46 400)

Clase			Lámina normal	Lámina de aleación: baja	mediana	alta	
Tipo			I 3.6	II 3.0	III 2.3	IV 1.5	IV 1.3
Tamaño mm × mm			1000 × 2000				750 × 1500
Espesor, mm			0.5				0.35
Densidad, kg/dm³			7.8	7.75	7.65	7.6	
Valor máximo de las pérdidas, W/kg		p_{Fe10}	3.6	3.0	2.3	1.5	1.3
		p_{Fe10}	8.6	7.2	5.6	3.7	3.3
Valor mínimo de la inducción	B_{25}	tesla gauss	1.53 15 300	1.50 15 000	1.47 14 700	1.43 14 300	
	B_{50}	tesla gauss	1.63 16 300	1.60 16 000	1.57 15 700	1.55 15 500	
	B_{100}	tesla gauss	1.73 17 300	1.71 17 100	1.69 16 900	1.65 16 500	
	B_{300}	tesla gauss	1.98 19 800	1.95 19 500	1.93 19 300	1.85 18 500	

Explicaciones

$B_{25} = 1.53$ tesla significa que una inducción o densidad de flujo mínima de 1.53 T se alcanzará con una intensidad de campo de 25 A/cm. Para una línea de flujo de, p. ej., 5 cm, se necesitarán pues: $5 \times 25 = 125$ A.

p_{Fe10} / p_{Fe15} — pérdidas magnéticas por unidad de masa con las inducciones de — 10 000 Gs = 1.0 tesla / 15 000 Gs = 1.5 tesla

Tablas

Propiedades de materiales sólidos y líquidos

Los valores corresponden a las siguientes condiciones*:

Densidad a $t = 15°C$

Temperaturas (o puntos) de fusión y de ebullición para $p = 1.0132$ bar $= 760$ Torr

Los valores entre paréntesis indican sublimación, o sea, cambio directo del estado sólido al gaseoso

Conductividad térmica a 20°C

Capacidad térmica específica (o calor específico) para el intervalo de temperaturas $0 < t < 100°C$

Sustancia	Densidad ρ	Puntos de fusión (soldf.)	Puntos de ebullición	Conduct. térmica κ	Calor específico c
	kg/dm³	°C	°C	W/(m·K)[1]	KJ/(kg·K)[2]
Aceite de colza	0.91[3]	— 3.5	300	0.17	1.97
Aceite de linaza	0.94[3]	— 20	316	0.15	.
Aceite para calefacción	0.92[3]	— 5	175-350	0.12	.
Aceite para máquinas	0.91	— 5	380-400	0.126	1.67
Aceite para transforms.	0.87	— 5	170	0.15	1.84
Acero	7.85	~ 1350	2500	47-58	0.46
Acero colado	7.8	~ 1350		52.3	0.502
Acero dulce	7.85	~ 1400	2500	46.5	0.461
Acero de alta velocidad	8.4-9.0	~ 1650	2600	25.6	0.498
Acetona	0.79[3]		56.1		
Acido acético	1.08	16.8	118	.	.
Acido cianhídrico	0.7	— 15	27	.	.
Acido clorhídrico 10%	1.05	— 14	102	0.50	3.14
Acido clorhídrico 40%	1.20	.	.	.	.
Acido fluorhídrico	0.99	— 92.5	19.5	.	.
Acido nítrico	1.56[4]	— 1.3	86	0.53	2.72
Acido sulfúrico	1.49[5]	— 73	— 10	.	1.34
Acido sulfúrico 50%	1.40		.	.	.
Acido sulfúrico conc.	1.84	10–0	338	0.5	1.38
Agata	~ 2.6	~ 1600	~ 2600	11.20	0.80
Agua	1.0[6]	0	100	0.58	4.183
Alcohol	0.79	— 130	78.4	0.17-0.23	2.42
Alcohol etílico 95%	0.82[3]	— 90	78	0.16	.
Alcohol metílico	0.8	— 98	66	.	2.51

*Ver las notas en la página Z 9

Tablas

Propiedades de materiales sólidos y líquidos

Sustancia	Densidad ρ	Puntos de fusión (soldf.)	Puntos de ebullición	Conduct. térmica κ	Calor específico c
	kg/dm³	°C	°C	W/(m·K) (1)	kJ/(kg·K) (2)
Aluminio fundido	2.6	658	~ 2200	209.3	0.904
Aluminio laminado	2.7	658	~ 2200	209.3	0.904
Ambar	1.0	~ 300	.	.	.
Antimonio	6.67	630	14.40	22.53	0.21
Arcilla	1.8-2.6	~ 1600	2980	0.84	0.92
Arena seca	1.2-1.6	~ 1550	2600	0.33	0.80
Arenisca	1.9-2.6	~ 1500	2600	1.3-1.7	0.92
Arsénico	5.72	815	(633)	.	0.348
Asbesto	~ 2.5	.	.	0.17	0.816
Asfalto (chapopote)	1.2	— 15	300	0.19	.
Azufre cristalizado	1.96	113	445	0.27	0.75
Bario	3.6	700	1537	.	0.29
Benceno (benzol)	0.89	5.4	80	0.137	1.80
Bencina	0.7	— 150	50-200	0.16	~ 2.1
Berilio	1.85	1279	.	167.5	1.880
Bismuto	9.8	271	1480	10.5	0.13
Bórax	1.72	741	.	.	0.996
Brea (alquitrán)	1.08	.	.	.	.
Bromo	3.14	— 7.3	63	.	.
Bronce	~ 8.0	900	2300	116-186	0.360
Bronce fosforado	8.8	900	.	105-116	0.364
Bronce de aluminio	7.7	1040	~ 2300	127.9	0.435
Cadmio	8.64	321	778	92.1	0.234
Calcio	1.55	800	851	.	0.63
Caliza	1.8-2.8	.	.	0.15-0.23	0.909
Carbón mineral	1.2-1.5	.	.	0.16	1.30
Carbón vegetal	0.3-0.5	.	(3540)	0.08	0.84
Carburo de silicio	3.12	.	.	15.2	0.67
Caucho (hule) crudo	0.95	125	.	0.20-0.34	.
Caucho (hule) duro	1.2-1.8	.	.	0.17	.
Cera	0.96	64	65-70	0.084	3.43
Cloroformo	1.53	— 70	61	.	.
Cobalto	8.8	1490	3168	69.8	0.435
Cobre	8.93	1083	2310	372.1	0.394
Cobre fundido	8.8	1083	2310	372.1	0.394
Cobre laminado	8.9	1083	2310	372.1	0.394
Colofonio	1.07	100-130	.	0.317	1.88
Concreto armado	2.4	.	.	0.8-1.7	0.88

Tablas

Propiedades de materiales sólidos y líquidos

Sustancia	Densidad ρ	Puntos de fusión (soldf.)	Puntos de ebullición	Conduct. térmica κ	Calor específico c
	kg/dm³	°C	°C	W/(m·K)[1]	kJ/(kg·K)[2]
Constantan	8.89	~ 1600	~ 2400	23.3	0.410
Coque	1.4	.	.	0.183	0.84
Corcho	0.2-0.3	.	.	0.30	2.05
Corindón	4.0	2050	2980	0.7	0.96
Cromo	6.7	~ 1800	2200	.	0.452
Cuarzo	~ 2.6	~ 1550	2590	1.09	0.80
Cuero	0.9-1.0	.	.	0.17	1.495
Diamante	3.5	.	(3540)	8.4	0.3329
Diesel (combustible)	0.88	— 5	175	0.13	.
Duraluminio	2.8	650	2000	129.1	0.92
Elektron	1.8	650	1500	162.8	1.00
Esmeril	4.0	2200	3000	11.6	0.96
Estaño fundido	7.2	232	2200	64.0	0.25
Estaño laminado	7.3-7.5	232	2200	64.0	0.25
Estroncio	2.54	797	1366	.	0.230
Esteatita	2.6-2.7	1650	.	2.7-2.8	1.05
Eter etílico	0.73	— 117	35	0.14	2.26
Fibra de vidrio	0.1-0.2	.	.	0.03-0.07	0.84
Fibra vulcanizada	1.28	.	.	0.21	1.26
Fibracel	1.5	.	.	.	1.357
Fósforo	1.83	44.2	287.3	.	0.80
Gasóleo (*gas oil*)	0.86	— 30	200-350	0.15	.
Gis	1.8-2.6	.	.	0.9-1.2	0.84
Glicerina	1.27[4]	— 20	290	0.29	2.43
Grafito	~ 2.1	.	(3540)	5.02	0.825
Grasas	0.93	30-175	~ 300	0.21	0.63-0.76
Gutapercha	~ 0.98	148	180	.	.
Hielo	0.9	0	100	1.7	2.09
Hierro (fierro)	7.86	1530	~ 3000	47-58	0.456
Hierro de 1a. fusión	7.0-7.8	1560	2500	52.3	0.54
Hierro de soldadura	7.8	1600	2500	54.7	0.515
Hierro forjado	7.8	~ 1200	.	47-58	0.461
Hierro fundido	7.25	~ 1200	2500	48.8	0.532
Hollín	1.6-1.7	.	(3540)	0.07	0.84
Incrustación (calderas)	2.5	1200	2800	1.2-3.0	0.80
Iridio	22.4	2450	4800	59.3	0.134
Ladrillo	1.4-1.6	.	.	0.8	0.92
Ladrillo refractario	1.8-2.2	~ 2000	2900	0.47	0.88

Tablas

Propiedades de materiales sólidos y líquidos

Sustancia	Densidad ρ	Puntos de fusión (soldf.)	Puntos de ebullición	Conduct. térmica κ	Calor específico c
	kg/dm³	°C	°C	W/(m·K)[1]	kJ/(kg·K)[2]
Latón fundido	8.4-8.7	900-980	~ 2300	81-105	0.385
Latón laminado	8.5-8.6	900-980	~ 2300	87-116	0.385
Litio	0.53	186	1336	301.2	0.360
Madera, abedul	0.5-0.8	.	.	0.142	1.88
alerce	0.5-0.8	.	.	0.12	1.30
arce	0.6-0.9	.	.	0.3-0.5	1.59
chopo	0.4-0.7	.	.	0.152	1.42
encino (roble)	0.7-1.0	.	.	0.21	2.39
fresno	0.6-0.9	.	.	0.3-0.5	1.59
haya blanca	0.6-0.8	.	.	0.143	1.34
haya roja	0.7-0.9	.	.	0.143	1.34
pino blanco	0.5-0.8	.	.	0.16	1.30
pino rojo	0.5-0.8	.	.	0.1-0.2	1.47
"pock"	1.28	.	.	0.19	2.51
Magnesia	3.2-3.6	.	.	.	.
Magnesio	1.74	650	1120	157.0	1.05
Magnesio de aleación	1.8	650	1500	70-145	1.00
Manganeso	7.3	1260	1900	.	0.46
Mármol	2.0-2.8	1290	2870	2.1-3.5	0.88
Mercurio	13.6	38.9	357	8.4	0.138
Metal Babbitt	7.5-10	300-400	2100	35-70	0.146
Metal Delta	8.6	950	.	104.7	0.384
Metal rojo	8.8	950	2300	127.9	0.381
Mica	~ 3.0	~ 1300	.	0.35	0.88
Minio	8.6-9.1	900	.	0.7	0.25
Molibdeno	10.2	~ 2500	3560	.	0.272
Nieve	0.1	0	100	.	4.187
Níquel	8.8	1452	2400	52.3	0.461
Oro	19.33	1064	2610	308.2	0.130
Osmio	22.48	2500	5300	.	0.130
Oxido de cromo	5.21	~ 2200	.	0.42	0.75
Oxido de hierro	5.1	1565	.	0.58	0.67
Paladio	11.5	1549	2200	70.9	0.247
Papel	0.7-1.1	.	.	.	1.336
Parafina	0.9	52	300	0.21	3.26
Percloroetileno	1.62	— 20	119	.	0.904
Petroéter	0.67	— 160	40-70	0.14	1.76
Petróleo	0.80	— 70	150-300	0.159	2.09

Tablas

Propiedades de materiales sólidos y líquidos

Z 9

Sustancia	Densidad ρ	Puntos de fusión (soldf.)	Puntos de ebullición	Conduct. térmica κ	Calor específico c
	kg/dm³	°C	°C	W/(m·K) [1]	kJ/(kg·K) [2]
Pizarra	2.6-2.7	~ 2000	.	0.42	0.758
Plata	10.5	960	2000	418.7	0.234
Plata alem. (alpaca)	8.4-8.7	~ 1050	.	29.1	0.398
Platino	21.4	1764	3800	69.8	0.130
Plomo	11.34	327	1525	35.0	0.130
Porcelana	2.2-2.5	1670	.	0.8-1.0	0.92
Potasio	0.86	63	762.2	.	0.080
Radio	5	700	.	.	.
Renio	21.4	3170	.	.	0.147
Rodio	12.3	1960	2500	88.3	0.243
Rubidio	1.52	39	696	.	0.33
Sebo	0.9-1.0	40-50	350	.	0.88
Selenio	4.3-4.8	220	690	.	0.352
Silicio	2.34	~1415	2400	.	0.80
Sodio	0.98	97.5	880	133.7	1.26
Tantalio	16.6	3030	.	73.3	0.138
Telurio	6.25	455	1390	.	0.201
Trementina (aguarrás)	0.87	— 10	160	0.10	1.80
Titanio	4.5	1800	.	.	0.611
Tolueno (toluol)	0.88	— 94.5	110	0.14	1.59
Torio	11.3	1845	.	.	0.113
Tricloroetileno	1.47	— 86	87	0.16	1.30
Tumbaga	8.65	900	2300	93-116	0.381
Tungsteno (wolframio)	19.1	~ 3350	4850	11.9	0.155
Turba	0.64	.	.	0.06-1.2	1.88
Uranio	18.7	1850	.	.	0.117
Vanadio	5.6	1715	.	.	0.50
Vidrio plano	2.5	700	.	0.6-1.0	0.84
Yodo	4.95	113.5	(184)	.	0.218
Zinc extruido	6.8	393	1000	139.6	0.38
Zinc fundido	6.86	419	920	110.5	0.38
Zinc laminado	7.15	419	920	105.8	0.38

(1) 1 W/(m · K) = 0.8598 kcal/(h · m · C)
(2) 1 kJ/(kg · K) = 0.2388 kcal/(kg · C) = 102 kgf · m/(kg · C)
(3) Para t = 20°C
(4) Para t = 0°C
(5) Para t = — 20°C
(6) Para t = 4°C

Tablas

Propiedades de materiales gaseosos

Los valores corresponden a las siguientes condiciones.

Densidad a $t = 15°C$ y $p = 1.0132$ bar $= 760$ Torr

Temperaturas de fusión y evaporación a $p = 1.0132$ bar

Conductividad térmica a $t = 20°C$ y $p = 1.0132$ bar

Calor específico a $t = 20°C$ y $p = 1.0132$ bar

Sustancia	Densidad ρ	Punto de fusión (soldf.)	Punto de ebullición	Conductividad térmica λ	Calor específico c_p	Calor específico c_v
	kg/m³	°C	°C	W/(m·K)	kJ/(kg·K)[1]	kJ/(kg·K)[1]
Acetileno	1.18	− 84	− 81	0.017017	1.67	1.34
Acido clorhídrico	1.64	− 114	− 85	.	0.80	0.59
Acido sulfhídrico	1.54	− 83	− 60.3	.	.	.
Aire (atmosférico)	1.293	− 220	− 195	0.0221	1.00	0.71
Amoniaco	0.77	− 78.3	− 33.7	0.01989	2.22	1.72
Argón	1.78	− 190	− 186	0.015912	0.54	0.33
Azufre	3.41	112	46	0.006188	0.67	0.54
Butano, iso-	2.67	− 145	− 10	.	.	.
Butano, n-	2.70	− 135	1	.	.	.
Cloro	3.22	− 100	− 34	0.014365	0.50	0.29
Dióxido de azufre	2.93	− 73	− 10	0.015912	0.63	0.50
Dióxido de carbono	1.96	− 57	− 78.5	0.01326	0.84	0.63
Etileno	1.26	− 169	− 102	0.034034	1.55	1.21
Gas de alumbrado	0.55	− 230	− 210	0.05525	2.14	1.55
Gas de altos hornos	1.28	− 210	− 170	0.01989	1.05	0.75
Gas pobre	1.22	− 210	− 170	0.01989	1.05	0.75
Helio	0.18	− 272	− 268.8	0.143	5.23	3.18
Hidrógeno	0.09	− 258	− 253	0.161993	14.28	10.13
Kriptón	3.7	− 157	− 152	0.00878	0.25	0.17
Metano	0.72	− 184	− 164	0.028067	2.22	1.72
Monóxido de carbono	1.25	− 211	− 190	0.020995	1.05	0.75
Neón	0.9	− 249	− 246	0.043758	1.05	0.63
Nitrógeno	1.25	− 210.5	− 195.7	0.0221	1.05	0.75
Oxígeno	1.43	− 219	− 183	0.022321	0.92	0.67
Ozono	2.14	− 251	− 112	.	.	.
Propano	2.02	− 190	− 45	.	.	.
Propileno	1.91	.	− 50	.	.	.
Vapor de agua[2]	0.81	0	100	0.016575	1.93	1.47
Xenón	5.8	− 111	− 106	0.0051	.	.

[1] 1 kJ/(kg · K) = 0.2388 kcal/(kg · K)

[2] A $t = 100°C$

COEFICIENTE DE DILATACION LONGITUDINAL α EN (10^{-6}) (K^{-1})
(para t de 0 a 100°C)

Sustancia	α	Sustancia	α
Acero dulce	12.0	Hierro fundido	10.5
Acero níquel	1.5	Latón	18.5
(= Invar con 36% Ni)		Molibdeno	5.2
Aluminio	23.8	Níquel	13.0
Bismuto	13.5	Oro	14.2
Bronce	17.5	Plata	19.7
Cadmio	30.0	Plata alemana (alpaca)	18.0
Cobre	16.5	Platino	9.0
Constantan	15.2	Plomo	29.0
Cuarzo	0.5	Porcelana	4.0
Estaño	23.0	Tungsteno (wolframio)	4.5
Esteatita	8.5	Zinc	30.0

COEFICIENTE DE DILATACION VOLUMETRICA β EN K^{-1}
(para t = 15°C)

Sustancia	β	Sustancia	β
Agua	0.00018	Mercurio	0.00018
Alcohol	0.0011	Petróleo	0.001
Bencina (gasolina)	0.001	Trementina (aguarrás)	0.001
Eter	0.0016	Tolueno (toluol)	0.00108
Glicerina	0.0005		

COEFICIENTE DE TRANSMISION DE CALOR k EN $W(m^2 \cdot K)$*

Material de pared	Espesor en centímetros							
	0.3	1	2	5	12	25	38	51
Caliza					3.1	2.2	1.7	1.4
Concreto armado				4.3	3.5			
Concreto de escoria					2.7	1.7	1.4	1.0
Concreto de grava				4.1	3.4	2.3		
Madera			3.8	2.4	1.7			
Ladrillo					2.9	2.0	1.5	1.3
Vidrio	5.8	5.3						

Ventanas

Vidrio sencillo, amasillado (con mástique)	5.8
Vidrio doble, 2 cm de separación, amasillado	2.9
Vidrio doble, 12 cm de separación, amasillado	2.3
Techo de tejas, sin y con material para juntas	11.6 y 5.8, respectivamente

*Valor aproximado para aire con movimiento ligero en ambos lados de la pared

Tablas

Propiedades térmicas de materiales

CALOR DE FUSION (POR UNIDAD DE MASA) l_f

Sustancia	kJ/kg[1]	Sustancia	kJ/kg
Acero	205	Latón	168
Aluminio	377	Manganeso	155
Antimonio	164	Mercurio	11.7
Azufre	38	Metal (aleación) Wood	33.5
Cadmio	46	Naftalina	151
Cobalto	243	Níquel	234
Cobre	172	Oro	67
Cromo	134	Parafina	147
Estaño	59	Plata	109
Eter etílico	113	Platino	113
Fenol	109	Plomo	23
Glicerina	176	Potasio	59
Hielo	335	Zinc	117
Hierro colado	126		

CALOR DE VAPORIZACION (POR UNIDAD DE MASA) l_v

(a 1.0132 bar = 760 Torr)

Sustancia	kJ/kg	Sustancia	kJ/kg
Agua	2250	Dióxido de carbono	595
Alcohol	880	Hidrógeno	503
Amoniaco	1410	Mercurio	281
Cloro	293	Nitrógeno	201
Clorometilo	406	Oxígeno	214
Dióxido de azufre	402	Tolueno (toluol)	365

CONSTANTE DE GAS R[2] EN J(kg · K)Y MASA MOLAR M (EN kg/kmol)

Sustancia	R	M	Sustancia	R	M
Acetileno	319	26	Hidrógeno	4124	2
Aire	287	29	Monóxido de carbono	297	28
Amoniaco	488	17	Nitrógeno	297	28
Dióxido de azufre	130	64	Oxígeno	260	32
Dióxido de carbono	189	44			

(1) 1 kJ/kg = 0.2388 kcal/kg

(2) 1 J/(kg·K) = 0.102 kgf·m/kg·°C)

CAPACIDAD TERMICA ESPECIFICA (MEDIA) c_p DE GASES IDEALES EN kJ/(kg · K) EN FUNCION DE LA TEMPERATURA t

t (°C)	CO	CO_2	H_2	H_2O	N_2 puro	N_2 atm.	O_2	SO_2	Aire
0	1.039	0.8205	14.38	1.858	1.039	1.026	0.9084	0.607	1.004
100	1.041	0.8689	14.40	1.874	1.041	1.031	0.9218	0.637	1.031
200	1.046	0.9122	14.42	1.894	1.044	1.035	0.9355	0.663	1.013
300	1.054	0.9510	14.45	1.918	1.049	1.041	0.9500	0.687	1.020
400	1.064	0.9852	14.48	1.946	1.057	1.048	0.9646	0.707	1.029
500	1.075	1.016	14.51	1.976	1.066	1.057	0.9791	0.724	1.039
600	1.087	1.043	14.55	2.008	1.076	1.067	0.9926	0.740	1.050
700	1.099	1.067	14.59	2.041	1.087	1.078	1.005	0.754	0.061
800	1.110	1.089	14.64	2.074	1.098	1.088	1.016	0.765	1.072
900	1.121	1.109	14.71	2.108	1.108	1.099	1.026	0.776	1.082
1000	1.131	1.126	14.78	2.142	1.118	1.108	1.035	0.784	1.092
1100	1.141	1.143	14.85	2.175	1.128	1.117	1.043	0.791	1.100
1200	1.150	1.157	14.94	2.208	1.137	1.126	1.051	0.798	1.109
1300	1.158	1.170	15.03	2.240	1.145	1.134	1.058	0.804	1.117
1400	1.166	1.183	15.12	2.271	1.153	1.142	1.065	0.810	1.124
1500	1.173	1.195	15.21	2.302	1.160	1.150	1.071	0.815	1.132
1600	1.180	1.206	15.30	2.331	1.168	1.157	1.077	0.820	1.138
1700	1.186	1.216	15.39	2.359	1.174	1.163	1.083	0.824	1.145
1800	1.193	1.225	15.48	2.386	1.181	1.169	1.089	0.829	1.151
1900	1.198	1.233	15.56	2.412	1.186	1.175	1.094	0.834	1.156
2000	1.204	1.241	15.65	2.437	1.192	1.180	1.099	0.837	1.162
2100	1.209	1.249	15.74	2.461	1.197	1.186	1.104		1.167
2200	1.214	1.256	15.82	2.485	1.202	1.191	1.109		1.172
2300	1.218	1.263	15.91	2.508	1.207	1.195	1.114		1.176
2400	1.222	1.269	15.99	2.530	1.211	1.200	1.118		1.181
2500	1.226	1.275	16.07	2.552	1.215	1.204	1.123		1.185
2600	1.230	1.281	16.14	2.573	1.219	1.207	1.127		1.189
2700	1.234	1.286	16.22	2.594	1.223	1.211	1.131		1.193
2800	1.237	1.292	16.28	2.614	1.227	1.215	1.135		1.196
2900	1.240	1.296	16.35	2.633	1.230	1.218	1.139		1.200
3000	1.243	1.301	16.42	2.652	1.233	1.221	1.143		1.203

Calculada a partir de datos en
E. Schmidt, *Einführung in die Technische Thermodynamik*, 9a. edición, Springer, 1962, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Tablas

Propiedades térmicas de materiales

CONSTANTE DE RADIACION C EN (10^{-8}) $W/m^2 \cdot K^4$) A 20°C

Material	C	Material	C
Acero mate	5.40	Latón mate	1.25
Acero pulido	0.34	Latón pulido	0.28
Agua	3.70	Madera cepillada	4.40
Aluminio mate	0.40	Níquel pulido	0.40
Aluminio pulido	0.23	Plata pulida	0.17
Cobre oxidado	3.60	Porcelana vidriada	5.22
Cobre pulido	0.28	Vidrio liso	5.30
Estaño pulido	0.34	Zinc mate	5.30
Hielo	3.60	Zinc pulido	0.28
Hollín	5.30	Superficie del cuerpo	
Ladrillo	5.30	negro (radiador absoluto)	5.67

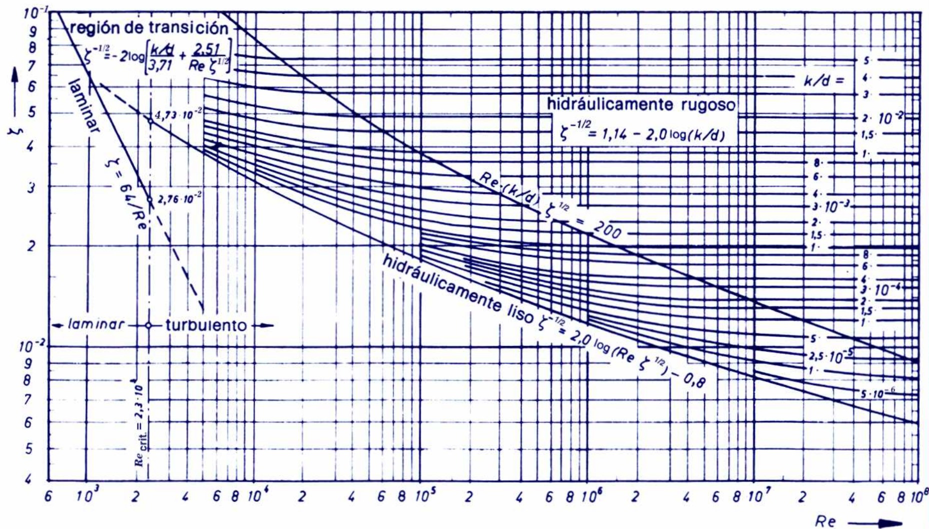
COLORES DE INCANDESCENCIA DEL ACERO Y TEMPERATURAS CORRESPONDIENTES

Tono	t (°C)	Tono	t (°C)
rojo oscuro	680	rojo amarillento	950
rojo cereza oscuro	740	amarillo	1000
rojo cereza medio	770	amarillo claro	1100
rojo cereza claro	800	blanco	1300 o más
rojo claro	850		
rojo muy claro	900		

COLORES DE ESTIRADO DEL ACERO Y TEMPERATURAS CORRESPONDIENTES

Tono	t (°C)	Tono	t (°C)
amarillo pálido	200	azul plúmbago	300
amarillo paja	220	azul claro	320
castaño (café)	240	gris azul	350
púrpura	260	gris	400
violeta	280		

Factor de resistencia friccional $\zeta = f(Re, \frac{k}{d})$



Nota: Para tubos de sección no circular k/d debe sustituirse por k/d_h.

Tablas

Propiedades hidrodinámicas

RUGOSIDAD *k*

(De Richter, *Rohrhydraulik*)

Material y clase de tubería	Estado	*k* en mm
Tubo de acero sin costura, laminado o extruido (calidad comercial), nuevo	de laminado típico decapado galvanizado por inmersión galvanizado comercial	0.02 - 0.06 0.03 - 0.04 0.07 - 0.10 0.10 - 0.16
Tubo de acero, usado	con oxidación uniforme normal con oxidación moderada e incrustación ligera incrustación mediana incrustación intensa limpiado después de uso prolongado	aprox. 0.15 0.15 - 0.4 aprox. 1.5 2 - 4 0.15 - 0.20
Tubo de hierro fundido	de fundido típico, nuevo embetunado, nuevo oxidado con incrustación limpiado después de uso prolongado de tipo medio en instalaciones urbanas muy oxidado	0.2 - 0.6 0.1 - 0.13 1 - 1.5 1.5 - 4 0.3 - 1.5 1.2 4.5
Tubo de lámina de acero soldada o remachada	soldado, nuevo remachado, nuevo con costura ligera con costura fuerte limpiado, de 25 años de uso, severamente incrustado	aprox. 0.15 aprox. 1 hasta 9 12.5

VISCOSIDAD DINAMICA η EN kg/(m · s)

(Valores aproximados)

t en °C		0	10	20	30	40	50	60	70	80	100
Agua $\times 10^{-5}$		179	131	100	80	65	55	47	41	36	28
Aceites	10	310	120	79	45	29	20	13	10	6	5
para	20	720	320	170	95	52	33	22	16	12	7
motores	30	1530	600	310	150	86	61	34	24	17	10
SAE	40	2610	950	430	220	120	72	45	31	22	12
$\times 10^{-3}$	50	3820	1530	630	310	160	97	59	41	28	15

Aleación	Proporciones en peso en % (promedios)									
	Cu	Zn	Pb	Sn	Sb	Al	Fe	Ni	P	Otros
Bronce	80-83			20-17						
Bronce fosforado	86-90	0-4		7-11						
Bronce de aluminio	98-82					2-18				
Bronce de níquel	50-70							50-30		
Bronce para chumaceras	82		16.5	1				0.5		
Cuproníquel	79						4	15		Mn: 2
Estaño-plata				95						Ag: 5
Latón	80-57	20-43								
Latón duro	60-56	38-43	2-1							
Latón de aluminio	60	32				8				
Latón de níquel	50	39.4	0.1				0.5	10	-0.8	
Magnalio						80				Mg: 20
Metal antifricción	5		85		10					
Metal Babbitt (o blanco)	5-9			80-73	10-18					
Metal Delta	55-63	43-36				0-1	0-1.5	-0.06	-0.01	Mn: $\sim$ 1
Metal Monel	30							70		
Metal rojo	82-86	0-6	0-0.1	16-8						
Metal rojo duro	70	9	7	9		5				
Plata alemana (alpaca)	50	30						20		
Tumbaga	80-95	20-5								

ESFUERZOS PERMISIBLES (N/mm^2)

Material	Módulo elástico E	Clase de carga*	Esfuerzo de aplastamiento $\sigma_{a(perm.)}$	Esfuerzo de tensión $\sigma_{t(perm.)}$	Esfuerzo de compresión $\sigma_{c(perm.)}$	Esfuerzo por flexión $\sigma_{f(perm.)}$	Esfuerzo cortante $\tau_{(perm.)}$	Esfuerzo por torsión $\tau_{t(perm.)}$
Acero dulce St 37-11	210 000	I	80-120	100-150	100-150	110-165	72-100	65- 95
		II	50- 70	65- 95	65- 95	70-105	48- 75	40- 60
		III	27- 33	45- 70	45- 70	50- 75	35- 50	30- 45
Acero dulce St 50-11	210 000	I	100-150	140-210	140-210	150-220	96-144	85-125
		II	70-100	90-135	90-135	100-150	64- 96	55- 85
		III	36- 50	65- 95	65- 95	70-105	32- 48	40- 60
Acero fundido GS-38	220 000	I	80-100	60-120	90-150	90-120	72- 95	36- 48
		II	53- 67	40- 80	60-100	60- 80	48- 64	24- 32
		III	27- 33	20- 40		30- 40	24- 32	12- 16
Hierro fundido GG-14	100 000	I	—	35- 45	85-115	40- 55	35- 50	30- 45
		II	—	27- 37	55- 75	25- 40	25- 35	20- 30
		III	—	20- 30	20- 30	20- 25	20- 25	15- 20
Hierro maleable GTW-35	—	I	50- 80	45- 70	60- 90	45- 70	—	30- 40
		II	33- 53	30- 47	40- 60	30- 47	—	20- 27
		III	17- 27	15- 23	—	15- 23	—	10- 13
Cobre laminado D-Cu F20	110 000	I	35- 50	40- 54	40- 54	40- 54	—	—
		II	23- 50	27- 36	27- 36	27- 36	—	—
		III	12- 17	13- 18		13- 18	—	—
Bronce fosforado CuSn6 F56	90 000	I	50- 75	60- 90	60- 90	60- 90	45- 70	45- 70
		II	33- 50	40- 60	—	40- 60	30- 47	30- 47
		III	17- 25	20- 30	—	20- 30	15- 23	15- 23

*Ver explicaciones en P1

MODULOS DE ELASTICIDAD Y ESFUERZOS PERMISIBLES POR FLEXION Y POR TORSION DE MATERIALES ELASTICOS PARA RESORTES (N/mm²)

Material	Módulo elástico axial E	Clase de carga*	Esfuerzo por flexión $\sigma_{f\,(perm.)}$ A	B	C	Módulo elástico angular G	Esfuerzo por torsión $\tau_{t\,(perm.)}$
Acero para resortes C75, templado y revenido	210 000	I II III	1000 750 500	500 350 250	150 120 80	80 000	650 500 350
Latón CuZn37 HV150	110 000	I II III	200 150 100	100 80 50	40 30 20	42 000	120 100 80
Plata alemana CuNi18 Zn20 HV160	142 000	I II III	300 250 200	150 120 100	50 40 30	55 000	200 180 150
Bronce CuSn6 Zn HV190	110 000	I II III	200 150 100	100 80 50	40 30 20	42 000	120 100 80
Bronce CuSn8 HV190	117 000	I II III	300 220 150	150 110 80	50 40 30	45 000	200 180 150

*Ver explicaciones en P 1

A: Para resortes sencillos (factor de seguridad FS ≅ 1.5)
B: Para resortes curvos y enrollados (FS ≅ 3)
C: Para resortes sin efecto secundario (FS ≅ 10)

Tablas

Fricción y rodamiento

COEFICIENTES PARA FRICCION CINETICA (μ) Y FRICCION ESTATICA (μ_o)

Material en contacto	sobre	μ en seco	μ con agua	μ con lubricante	μ_o en seco	μ_o con agua	μ_o con lubricante
Bronce	bronce	0.20	0.10	0.06			0.11
	h. fund.	0.18		0.08			
	acero	0.18		0.07	0.19		
Encino	encino ‖	0.50			0.60		
	encino ┼	0.30			0.50		
Hierro fundido (gris)	h. fund.		0.31	0.10			0.16
	acero	0.18			0.33		
Caucho (hule)	asfalto	0.50	0.30	0.20			
	concreto	0.60	0.50	0.30			
Cuerda de cáñamo	madera (común)				0.50		
Banda de cuero	encino	0.40			0.50		
	h. fund.	0.40	0.40	0.20	0.40	0.50	0.25
Acero	encino		0.08	0.26		0.65	0.30
	hielo	0.014			0.027		
	acero	0.10		0.10	0.15		0.12

RESISTENCIA AL RODAMIENTO

Materiales en contacto	Factor *f* en mm*
Caucho sobre asfalto	1.0
Caucho sobre concreto	1.5
Madera *lignum vitae* sobre madera *l. vitae*	5.0
Acero sobre acero (duro: cojinetes)	0.05
Acero sobre acero (suave)	0.5
Olmo sobre madera *l. vitae*	8.0

‖ Movimiento en la dirección de las fibras de ambos cuerpos
┼ Movimiento perpendicular a las fibras
*Brazo de palanca de la fuerza resistente.

ILUMINACION MEDIA E_v (lux)

Tipo de instalación		Sólo para alumbrado general	Alumbrado general y localizado: Localizado	Alumbrado general y localizado: General
Talleres, de acuerdo con la clase de trabajo	rudo	80	100	20
	normal	160	400	40
	preciso	300	1000	80
	muy preciso	600	4000	300
Habitaciones, en que el alumbrado es	débil	40		
	moderado	80		
	brillante	150		
Alumbrado público, en sitios con tránsito	escaso	5		
	mediano	10		
	intenso	20		
	muy intenso	40		
Patios de fábricas, con tránsito	ligero	5		
	pesado	20		

EFICACIA DE ILUMINACION η

Tipo de alumbrado	Tono de color en la superficie iluminada: claro	mediano	oscuro
Directo	0.50	0.40	0.30
Indirecto	0.35	0.20	0.05
	Con reflector: profundo	amplio	alto
Público	0.45	0.40	0.35

FLUJO LUMINICO Φ_v (kilolúmenes, klm)

Lámparas incandescentes, de tipo normal (al voltaje de 220 V)	$P_{el.}$	W	15	25	40	60	75	100
	Φ_v	klm	0.12	0.23	0.43	0.73	0.96	1.38
	$P_{el.}$	W	150	200	300	500	1000	2000
	Φ_v	klm	2.22	3.15	5.0	8.4	18.8	40.0
Lámparas fluorescentes, tubulares de 38 mm de diámetro. Para tipos "blanco claro" y "luz de día"	$P_{el.}$	W	15	20	25	40	65	
	Φ_v	klm	0.59	1.22	1.71	2.98	4.78	
Lámparas de vapor de mercurio, alta presión	$P_{el.}$	W	125	250	400	700	1000	2000
	Φ_v	klm	5.6	12	21	37	52	125

$P_{el.}$ Potencia eléctrica (en watts)

Tablas

Funciones trigonométricas

SENO

GRAD	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0·0000	0·0029	0·0058	0·0087	0·0116	0·0145	0·0175	89
1	0·0175	0·0204	0·0233	0·0262	0·0291	0·0320	0·0349	88
2	0·0349	0·0378	0·0407	0·0436	0·0465	0·0494	0·0523	87
3	0·0523	0·0552	0·0581	0·0610	0·0640	0·0669	0·0698	86
4	0·0698	0·0727	0·0756	0·0785	0·0814	0·0843	0·0872	85
5	0·0872	0·0901	0·0929	0·0958	0·0987	0·1016	0·1045	84
6	0·1045	0·1074	0·1103	0·1132	0·1161	0·1190	0·1219	83
7	0·1219	0·1249	0·1276	0·1305	0·1334	0·1363	0·1392	82
8	0·1392	0·1421	0·1449	0·1478	0·1507	0·1536	0·1564	81
9	0·1564	0·1593	0·1622	0·1650	0·1679	0·1708	0·1736	80
10	0·1736	0·1765	0·1794	0·1822	0·1851	0·1880	0·1908	79
11	0·1908	0·1937	0·1965	0·1994	0·2022	0·2051	0·2079	78
12	0·2079	0·2108	0·2136	0·2164	0·2193	0·2221	0·2250	77
13	0·2250	0·2278	0·2306	0·2334	0·2363	0·2391	0·2419	76
14	0·2419	0·2447	0·2476	0·2504	0·2532	0·2560	0·2588	75
15	0·2588	0·2616	0·2644	0·2672	0·2700	0·2728	0·2756	74
16	0·2756	0·2784	0·2812	0·2840	0·2868	0·2896	0·2924	73
17	0·2924	0·2952	0·2979	0·3007	0·3035	0·3062	0·3090	72
18	0·3090	0·3118	0·3145	0·3173	0·3201	0·3228	0·3256	71
19	0·3256	0·3283	0·3311	0·3338	0·3365	0·3393	0·3420	70
20	0·3420	0·3448	0·3475	0·3502	0·3529	0·3557	0·3584	69
21	0·3584	0·3611	0·3638	0·3665	0·3692	0·3719	0·3746	68
22	0·3746	0·3773	0·3800	0·3827	0·3854	0·3881	0·3907	67
23	0·3907	0·3934	0·3961	0·3987	0·4014	0·4041	0·4067	66
24	0·4067	0·4094	0·4120	0·4147	0·4173	0·4200	0·4226	65
25	0·4226	0·4253	0·4279	0·4305	0·4331	0·4358	0·4384	64
26	0·4384	0·4410	0·4436	0·4462	0·4488	0·4514	0·4540	63
27	0·4540	0·4566	0·4592	0·4617	0·4643	0·4669	0·4695	62
28	0·4695	0·4720	0·4746	0·4772	0·4797	0·4823	0·4848	61
29	0·4848	0·4874	0·4899	0·4924	0·4950	0·4975	0·5000	60
30	0·5000	0·5025	0·5050	0·5075	0·5100	0·5125	0·5150	59
31	0·5150	0·5175	0·5200	0·5225	0·5250	0·5275	0·5299	58
32	0·5299	0·5324	0·5348	0·5373	0·5398	0·5422	0·5446	57
33	0·5446	0·5471	0·5495	0·5519	0·5544	0·5568	0·5592	56
34	0·5592	0·5616	0·5640	0·5664	0·5688	0·5712	0·5736	55
35	0·5736	0·5760	0·5783	0·5807	0·5831	0·5854	0·5878	54
36	0·5878	0·5901	0·5925	0·5948	0·5972	0·5995	0·6018	53
37	0·6018	0·6041	0·6065	0·6088	0·6111	0·6134	0·6157	52
38	0·6157	0·6180	0·6202	0·6225	0·6248	0·6271	0·6293	51
39	0·6293	0·6316	0·6338	0·6361	0·6383	0·6406	0·6428	50
40	0·6428	0·6450	0·6472	0·6494	0·6517	0·6539	0·6561	49
41	0·6561	0·6583	0·6604	0·6626	0·6648	0·6670	0·6691	48
42	0·6691	0·6713	0·6734	0·6756	0·6777	0·6799	0·6820	47
43	0·6820	0·6841	0·6862	0·6884	0·6905	0·6926	0·6947	46
44	0·6947	0·6967	0·6988	0·7009	0·7030	0·7050	0·7071	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	GRAD

COSENO

Tablas

Funciones trigonométricas

GRAD	0'	10'	20'	30' (COSENO)	40'	50'	60'	
0	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	0·9999	0·9999	0·9998	89
1	0·9998	0·9998	0·9997	0·9997	0·9996	0·9995	0·9994	88
2	0·9994	0·9993	0·9992	0·9990	0·9989	0·9988	0·9986	87
3	0·9986	0·9985	0·9983	0·9981	0·9980	0·9978	0·9976	86
4	0·9976	0·9974	0·9971	0·9969	0·9967	0·9964	0·9962	85
5	0·9962	0·9959	0·9957	0·9954	0·9951	0·9948	0·9945	84
6	0·9945	0·9942	0·9939	0·9936	0·9932	0·9929	0·9925	83
7	0·9925	0·9922	0·9918	0·9914	0·9911	0·9907	0·9903	82
8	0·9903	0·9899	0·9894	0·9890	0·9886	0·9881	0·9877	81
9	0·9877	0·9872	0·9868	0·9863	0·9858	0·9853	0·9848	80
10	0·9848	0·9843	0·9838	0·9833	0·9827	0·9822	0·9816	79
11	0·9816	0·9311	0·9805	0·9799	0·9793	0·9787	0·9781	78
12	0·9781	0·9775	0·9769	0·9763	0·9757	0·9750	0·9744	77
13	0·9744	0·9737	0·9730	0·9724	0·9717	0·9710	0·9703	76
14	0·9703	0·9696	0·9689	0·9681	0·9674	0·9667	0·9659	75
15	0·9659	0·9652	0·9644	0·9636	0·9628	0·9621	0·9613	74
16	0·9613	0·9605	0·9596	0·9588	0·9580	0·9572	0·9563	73
17	0·9563	0·9555	0·9546	0·9537	0·9528	0·9520	0·9511	72
18	0·9511	0·9502	0·9492	0·9483	0·9474	0·9465	0·9455	71
19	0·9455	0·9446	0·9436	0·9426	0·9417	0·9407	0·9397	70
20	0·9397	0·9387	0·9377	0·9367	0·9356	0·9346	0·9336	69
21	0·9336	0·9325	0·9315	0·9304	0·9293	0·9283	0·9272	68
22	0·9272	0·9261	0·9250	0·9239	0·9228	0·9216	0·9205	67
23	0·9205	0·9194	0·9182	0·9171	0·9159	0·9147	0·9135	66
24	0·9135	0·9124	0·9112	0·9100	0·9088	0·9075	0·9063	65
25	0·9063	0·9051	0·9038	0·9026	0·9013	0·9001	0·8988	64
26	0·8988	0·8975	0·8962	0·8949	0·8936	0·8923	0·8910	63
27	0·8910	0·8897	0·8884	0·8870	0·8857	0·8843	0·8829	62
28	0·8829	0·8816	0·8802	0·8788	0·8774	0·8760	0·8746	61
29	0·8746	0·8732	0·8718	0·8704	0·8689	0·8675	0·8660	60
30	0·8660	0·8646	0·8631	0·8616	0·8601	0·8587	0·8572	59
31	0·8572	0·8557	0·8542	0·8526	0·8511	0·8496	0·8480	58
32	0·8480	0·8465	0·8450	0·8434	0·8418	0·8403	0·8387	57
33	0·8387	0·8371	0·8355	0·8339	0·8323	0·8307	0·8290	56
34	0·8290	0·8274	0·8258	0·8241	0·8225	0·8208	0·8192	55
35	0·8192	0·8175	0·8158	0·8141	0·8124	0·8107	0·8090	54
36	0·8090	0·8073	0·8056	0·8039	0·8021	0·8004	0·7986	53
37	0·7986	0·7969	0·7951	0·7934	0·7916	0·7898	0·7880	52
38	0·7880	0·7862	0·7844	0·7826	0·7808	0·7790	0·7771	51
39	0·7771	0·7753	0·7735	0·7716	0·7698	0·7679	0·7660	50
40	0·7660	0·7642	0·7623	0·7604	0·7585	0·7566	0·7547	49
41	0·7547	0·7528	0·7509	0·7490	0·7470	0·7451	0·7431	48
42	0·7431	0·7412	0·7392	0·7373	0·7353	0·7333	0·7314	47
43	0·7314	0·7294	0·7274	0·7254	0·7234	0·7214	0·7193	46
44	0·7193	0·7173	0·7153	0·7133	0·7112	0·7092	0·7071	45
	60'	50'	40'	30' (SENO)	20'	10'	0'	GRAD

Tablas

Funciones trigonométricas

GRAD	TANGENTE 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0·0000	0·0029	0·0058	0·0087	0·0116	0·0145	0·0175	89
1	0·0175	0·0204	0·0233	0·0262	0·0291	0·0320	0·0349	88
2	0·0349	0·0378	0·0407	0·0437	0·0466	0·0495	0·0524	87
3	0·0524	0·0553	0·0582	0·0612	0·0641	0·0670	0·0699	86
4	0·0699	0·0729	0·0758	0·0787	0·0816	0·0846	0·0875	85
5	0·0875	0·0904	0·0934	0·0963	0·0992	0·1022	0·1051	84
6	0·1051	0·1080	0·1110	0·1139	0·1169	0·1198	0·1228	83
7	0·1228	0·1257	0·1287	0·1317	0·1346	0·1376	0·1405	82
8	0·1405	0·1435	0·1465	0·1495	0·1524	0·1554	0·1584	81
9	0·1584	0·1614	0·1644	0·1673	0·1703	0·1733	0·1763	80
10	0·1763	0·1793	0·1823	0·1853	0·1883	0·1914	0·1944	79
11	0·1944	0·1974	0·2004	0·2035	0·2065	0·2095	0·2126	78
12	0·2126	0·2156	0·2186	0·2217	0·2247	0·2278	0·2309	77
13	0·2309	0·2339	0·2370	0·2401	0·2432	0·2462	0·2493	76
14	0·2493	0·2524	0·2555	0·2586	0·2617	0·2648	0·2679	75
15	0·2679	0·2711	0·2742	0·2773	0·2805	0·2836	0·2867	74
16	0·2867	0·2899	0·2931	0·2962	0·2994	0·3026	0·3057	73
17	0·3057	0·3089	0·3121	0·3153	0·3185	0·3217	0·3249	72
18	0·3249	0·3281	0·3314	0·3346	0·3378	0·3411	0·3443	71
19	0·3443	0·3476	0·3508	0·3541	0·3574	0·3607	0·3640	70
20	0·3640	0·3673	0·3706	0·3739	0·3772	0·3805	0·3839	69
21	0·3839	0·3872	0·3906	0·3939	0·3973	0·4006	0·4040	68
22	0·4040	0·4074	0·4108	0·4142	0·4176	0·4210	0·4245	67
23	0·4245	0·4279	0·4314	0·4348	0·4383	0·4417	0·4452	66
24	0·4452	0·4487	0·4522	0·4557	0·4592	0·4628	0·4663	65
25	0·4663	0·4699	0·4734	0·4770	0·4806	0·4841	0·4877	64
26	0·4877	0·4913	0·4950	0·4986	0·5022	0·5059	0·5095	63
27	0·5095	0·5132	0·5169	0·5206	0·5243	0·5280	0·5317	62
28	0·5317	0·5354	0·5392	0·5430	0·5467	0·5505	0·5543	61
29	0·5543	0·5581	0·5619	0·5658	0·5696	0·5735	0·5774	60
30	0·5774	0·5812	0·5851	0·5890	0·5930	0·5969	0·6009	59
31	0·6009	0·6048	0·6088	0·6128	0·6168	0·6208	0·6249	58
32	0·6249	0·6289	0·6330	0·6371	0·6412	0·6453	0·6494	57
33	0·6494	0·6536	0·6577	0·6619	0·6661	0·6703	0·6745	56
34	0·6745	0·6787	0·6830	0·6873	0·6916	0·6959	0·7002	55
35	0·7002	0·7046	0·7089	0·7133	0·7177	0·7221	0·7265	54
36	0·7265	0·7310	0·7355	0·7400	0·7445	0·7490	0·7536	53
37	0·7536	0·7581	0·7627	0·7673	0·7720	0·7766	0·7813	52
38	0·7813	0·7860	0·7907	0·7954	0·8002	0·8050	0·8098	51
39	0·8098	0·8146	0·8195	0·8243	0·8292	0·8342	0·8391	50
40	0·8391	0·8441	0·8491	0·8541	0·8591	0·8642	0·8693	49
41	0·8693	0·8744	0·8796	0·8847	0·8899	0·8952	0·9004	48
42	0·9004	0·9057	0·9110	0·9163	0·9217	0·9271	0·9325	47
43	0·9325	0·9360	0·9435	0·9490	0·9545	0·9601	0·9657	46
44	0·9657	0·9713	0·9770	0·9827	0·9884	0·9942	1·0000	45
	60'	50'	40'	30' COTANGENTE	20'	10'	0'	GRAD

Tablas

Funciones trigonométricas

Z 25

GRAD	COTANGENTE 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343·77	171·89	114·59	85·940	68·750	57·290	89
1	57·290	49·104	42·964	38·188	34·368	31·242	28·636	88
2	28·636	26·432	24·542	22·904	21·470	20·206	19·081	87
3	19·081	18·075	17·169	16·350	15·605	14·924	14·301	86
4	14·301	13·727	13·197	12·706	12·251	11·826	11·430	85
5	11·430	11·059	10·712	10·385	10·078	9·7882	9·5144	84
6	9·5144	9·2553	9·0098	8·7769	8·5556	8·3450	8·1443	83
7	8·1443	7·9530	7·7703	7·5957	7·4287	7·2687	7·1154	82
8	7·1154	6·9682	6·8269	6·6912	6·5605	6·4348	6·3137	81
9	6·3137	6·1970	6·0844	5·9758	5·8708	5·7694	5·6713	80
10	5·6713	5·5764	5·4845	5·3955	5·3093	5·2257	5·1446	79
11	5·1446	5·0658	4·9894	4·9152	4·8430	4·7729	4·7046	78
12	4·7046	4·6382	4·5736	4·5107	4·4494	4·3897	4·3315	77
13	4·3315	4·2747	4·2193	4·1653	4·1126	4·0611	4·0108	76
14	4·0108	3·9616	3·9136	3·8667	3·8208	3·7759	3·7320	75
15	3·7320	3·6891	3·6470	3·6059	3·5656	3·5261	3·4874	74
16	3·4874	3·4495	3·4124	3·3759	3·3402	3·3052	3·2709	73
17	3·2709	3·2371	3·2041	3·1716	3·1397	3·1084	3·0777	72
18	3·0777	3·0475	3·0178	2·9887	2·9600	2·9319	2·9042	71
19	2·9042	2·8770	2·8502	2·8239	2·7980	2·7725	2·7475	70
20	2·7475	2·7228	2·6985	2·6746	2·6511	2·6279	2·6051	69
21	2·6051	2·5826	2·5605	2·5386	2·5172	2·4960	2·4751	68
22	2·4751	2·4545	2·4342	2·4142	2·3945	2·3750	2·3558	67
23	2·3558	2·3369	2·3183	2·2998	2·2817	2·2637	2·2460	66
24	2·2460	2·2286	2·2113	2·1943	2·1775	2·1609	2·1445	65
25	2·1445	2·1283	2·1123	2·0965	2·0809	2·0655	2·0503	64
26	2·0503	2·0353	2·0204	2·0057	1·9912	1·9768	1·9626	63
27	1·9626	1·9486	1·9347	1·9210	1·9074	1·8940	1·8807	62
28	1·8807	1·8676	1·8546	1·8418	1·8291	1·8165	1·8040	61
29	1·8040	1·7917	1·7796	1·7675	1·7556	1·7438	1·7320	60
30	1·7320	1·7205	1·7090	1·6977	1·6864	1·6753	1·6643	59
31	1·6643	1·6534	1·6426	1·6318	1·6212	1·6107	1·6003	58
32	1·6003	1·5900	1·5798	1·5697	1·5597	1·5497	1·5399	57
33	1·5399	1·5301	1·5204	1·5108	1·5013	1·4919	1·4826	56
34	1·4826	1·4733	1·4641	1·4550	1·4460	1·4370	1·4281	55
35	1·4281	1·4193	1·4106	1·4019	1·3934	1·3848	1·3764	54
36	1·3764	1·3680	1·3597	1·3514	1·3432	1·3351	1·3270	53
37	1·3270	1·3190	1·3111	1·3032	1·2954	1·2876	1·2799	52
38	1·2799	1·2723	1·2647	1·2572	1·2497	1·2423	1·2349	51
39	1·2349	1·2276	1·2203	1·2131	1·2059	1·1988	1·1918	50
40	1·1918	1·1847	1·1778	1·1708	1·1640	1·1571	1·1504	49
41	1·1504	1·1436	1·1369	1·1303	1·1237	1·1171	1·1106	48
42	1·1106	1·1041	1·0977	1·0913	1·0850	1·0786	1·0724	47
43	1·0724	1·0661	1·0599	1·0538	1·0477	1·0416	1·0355	46
44	1·0355	1·0295	1·0235	1·0176	1·0117	1·0058	1·0000	45
	60'	50'	40'	30' TANGENTE	20'	10'	0'	GRAD

PARTE II

APLICACIONES AVANZADAS

Análisis vectorial

A′1

Magnitud, dirección y componentes de vectores

Vector: Representación de una cantidad física con magnitud y dirección

Coordenadas del punto inicial A del vector $\vec{a}$: x_1, y_1, z_1
Coordenadas del punto final B del vector $\vec{a}$: x_2, y_2, z_2

Vectores unitarios sobre los ejes OX, OY, OZ: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

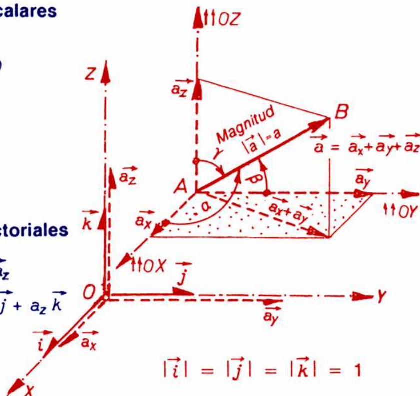
Componentes escalares

a′1 $a_x,\ a_y,\ a_z \gtreqless 0$

a′2 $a_x = x_2 - x_1$

a′3 $a_y = y_2 - y_1$

a′4 $a_z = z_2 - z_1$



Componentes vectoriales

a′5 $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$

a′6 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

Magnitud de un vector: $|\vec{a}|$ (o bien, a)

a′7 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ($|\vec{a}|$ siempre ≥ 0)

Cosenos directores de un vector: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$
α, β, γ son los ángulos entre el vector $\vec{a}$ y los ejes OX, OY y OZ. ($\alpha, \beta, \gamma = 0^\circ \ldots 180^\circ$).

a′8 $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$

a′9 con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Cálculo de las componentes. Si se conocen $|\vec{a}|$, α, β, γ

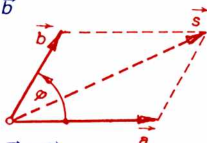
a′10 $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$; $a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$; $a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$

Observación: Operaciones vectoriales como la determinación de magnitudes, cosenos directores, sumas y productos, se llevan a cabo con las componentes de los vectores a lo largo de los ejes OX, OY y OZ.

Análisis vectorial

Adición y sustracción de vectores

Suma vectorial $\vec{s}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$



a′11 $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = s_x \cdot \vec{i} + s_y \cdot \vec{j} + s_z \cdot \vec{k}$

a′12 $s_x = a_x + b_x \quad s_y = a_y + b_y \quad s_z = a_z + b_z$

a′13 $|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$

Diferencia vectorial $\vec{s}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$



a′14 $\vec{s} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad (-\vec{b}) \uparrow\downarrow \vec{b}$ *)

a′15 $s_x = a_x - b_x; \quad s_y = a_y - b_y; \quad s_z = a_z - b_z$

a′16 $|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$

	Valores importantes $\lvert\vec{s}\rvert$ para 2 vectores	φ	0°; 360°	90°	180°	270°
a′17		$\lvert\vec{a}\rvert \neq \lvert\vec{b}\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$	$\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert - \lvert\vec{b}\rvert$	$\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2}$
a′18		$\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert$	$2\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert\sqrt{2}$	0	$\lvert\vec{a}\rvert\sqrt{2}$

Suma vectorial $\vec{s}$ de vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$, etc.:

a′19 $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \ldots = s_x \cdot \vec{i} + s_y \cdot \vec{j} + s_z \cdot \vec{k}$

a′20 $s_x = a_x + b_x - c_x + \ldots\,; \quad s_y = a_y + b_y - c_y + \ldots\,; \quad s_z = a_z + b_z - c_z + \ldots$

a′21 $|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$

Producto de un escalar por un vector

Escalar: Magnitud física sin dirección.

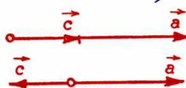
El producto del escalar *k* **con el vector** $\vec{a}$ da el vector $\vec{c}$.

a′22 $\vec{c} = k \cdot \vec{a} \qquad (k \gtreqless 0)$

a′23 $c_x = k \cdot a_x\,; \quad c_y = k \cdot a_y\,; \quad c_z = k \cdot a_z \qquad c = k \cdot |\vec{a}| \quad (c \lesseqgtr 0)$

Si $k > 0$, entonces $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, por lo que

$k < 0$, entonces $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, por lo que



Ejemplo: Fuerza = masa × aceleración $\qquad \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

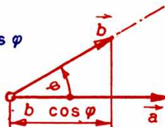
a′24 $m > 0; \quad \vec{F_a} \uparrow\uparrow \vec{a}\,; \quad \vec{F_a} = m \cdot \vec{a}\,; \quad F_a = m \cdot a$

*) El símbolo $\uparrow\downarrow$ significa que los vectores $(-\vec{b})$ y $\vec{b}$ son paralelos y de sentido contrario.

Productos de dos vectores libres

El producto escalar de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ da el escalar k.

Símbolo del producto escalar: punto "·"



a′25 $k = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a \cdot b \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

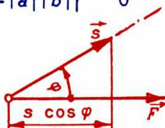
a′26 $k = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (k \gtreqless 0)$

a′27 $\varphi = \cos^{-1} \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

a′28 Valores importantes

φ	0°; 360°;	90°	180°	270°
$\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos\varphi$	$+\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert$	0	$-\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert$	0

Ejemplo: Trabajo W de una fuerza F en el desplazamiento s

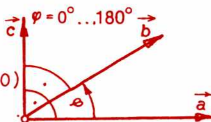


a′29 W = Fuerza × Desplazamiento = $\vec{F} \cdot \vec{s}$

a′30 $W = F\, s \cos\varphi \qquad (W \gtreqless 0;\ F, s \geqq 0)$

El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ da el vector $\vec{c}$.

Símbolo del producto vectorial: cruz "×"

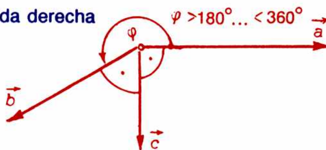


a′31 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

a′32 $|\vec{c}| = a\ b\ \text{sen}\,\varphi = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \text{sen}\,\varphi$

$c \perp a$ y $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forman una tríada derecha



a′33 $c_x = a_y\ b_z - a_z\ b_y$

a′34 $c_y = a_z\ b_x - a_x\ b_z$

a′35 $c_z = a_x\ b_y - a_y\ b_x$

a′36 $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$

a′37 Valores importantes

φ	0°; 360°	90°	180°	270°
$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$ sen φ	0	$+\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$	0	$-\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$

Ejemplo: Momento M de una fuerza F respecto a un punto O:



a′38 $\vec{M}$ = Radio vector × fuerza = $\vec{r} \times \vec{F} = -(\vec{F}\ \vec{r})$

a′39 $M = r\ F \cdot \text{sen}\,\varphi \qquad (M \gtreqless 0;\quad r, F \geqq 0)$

Funciones racionales | B′1

Función de fracciones racionales. Descomposición

Función de fracciones racionales

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} \qquad \begin{matrix} n > m \\ n \text{ y } m \text{ enteros} \end{matrix}$$

Los coeficientes a_ν, b_μ pueden ser reales o complejos. Si n_i son las raíces de $Q(x)$, se obtiene la forma factorizada:

b′1 $$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x-n_1)^{k1} \cdot (x-n_2)^{k2} \ldots (x-n_q)^{kq}}$$

En esta expresión pueden presentarse raíces de multiplicidad $k_1, k_2, \ldots k_q$ de $Q(x)$, las que pueden ser reales o complejas; a es un factor constante.

Descomposición en fracciones parciales

Para lograr un manejo más sencillo de $y(x)$ —por ejemplo, para su integración— es conveniente descomponer $y(x)$ en fracciones parciales:

b′2 $$\begin{aligned} y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-n_1} + \frac{A_{12}}{(x-n_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k1}}{(x-n_1)^{k1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{x-n_2} + \frac{A_{22}}{(x-n_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k2}}{(x-n_2)^{k2}} + \ldots + \\ &+ \frac{A_{q1}}{x-n_q} + \frac{A_{q2}}{(x-n_q)^2} + \ldots + \frac{A_{qkq}}{(x-n_q)^{kq}} \end{aligned}$$

Si los coeficientes de $Q(x)$ son reales, aparecen raíces complejas por parejas (raíces complejas conjugadas). Para efectuar la descomposición se agrupan estas parejas en fracciones parciales reales. Si en b′1, $n_2 = \bar{n}_1$ (compleja conjugada de n_1,) y debido a su aparición por parejas $k_1 = k_2 = k$, entonces las fracciones parciales de b′2 con las constantes $A_{11} \ldots A_{2k2}$ pueden agruparse en las siguientes fracciones parciales:

b′3 $$\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + ax + b} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + ax + b)^2} + \ldots + \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2 + ax + b)^k}$$

Las constantes $A_{11} \ldots A_{qkq}$, $B_{11} \ldots B_{1k}$ y $C_{11} \ldots C_{1k}$ se determinan igualando los coeficientes de igual potencia en x en ambos miembros de la ecuación, después de que en la parte derecha, descompuesta ésta en fracciones parciales, se toma el común denominador $Q(x)$.

Ejemplo:

$$y(x) = \frac{2x-1}{(x+1-2i)(x+1+2i)(x+1)^2} = \frac{2x-1}{Q(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+2x+5} + \frac{A_{q1}}{x+1} + \frac{A_{q2}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x-1}{Q(x)} = \frac{B_{11}x(x+1)^2 + C_{11}(x+1)^2 + A_{q1}(x+1)(x^2+2x+5) + A_{q2}(x^2+2x+5)}{Q(x)}$$

$$\begin{aligned} 2x-1 = &(A_{q1} + B_{11})x^3 + (3A_{q1} + A_{q2} + 2B_{11} + C_{11})x^2 + \\ &+ (7A_{q1} + 2A_{q2} + B_{11} + 2C_{11})x + 5A_{q1} + 5A_{q2} + C_{11} \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las partes izquierda y derecha se obtiene:

$$B_{11} = -1/2; \quad C_{11} = 1/4; \quad A_{q1} = 1/2; \quad A_{q2} = -3/4.$$

Cuando se tienen raíces sencillas n_i, las constantes $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{q1}$ de la ecuación b′2 pueden calcularse como sigue:

b′4 $$A_{11} = P(n_1)/Q'(n_1); \quad A_{21} = P(n_2)/Q'(n_2); \ldots A_q = P(n_q)/Q'(n_q)$$

Transformadas de funciones — C′1

Transformada de Fourier

Generalidades

Con la transformada de Fourier $F\{s(t)\}$ se lleva a cabo, con ayuda de la integral de Fourier, un desarrollo de la función tiempo $s(t)$ en un espectro continuo (densidad espectral) $S(\omega)$, en el cual la frecuencia corresponde a la densidad del espectro; $s(t)$ debe tener las siguientes propiedades:

a) ser divisible en un número finito de intervalos en los cuales $s(t)$ sea continua y monótona.

b) poseer valores definidos en las discontinuidades $s(t+0)$ y $s(t-0)$ de modo que pueda expresarse

c′1 $$s(t) = \tfrac{1}{2}[s(t+0) + s(t)+0)]$$

c′2 c) ser tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\, dt$ converja.

La transformada inversa $F^{-1}\{S(\omega)\}$ conduce a la función tiempo.

Definiciones

c′3 $$F\{s(t)\} = S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\omega t} \cdot dt; \qquad i = \sqrt{-1}$$

c′4 $$F^{-1}\{S(\omega)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{i\omega t} \cdot d\omega; \qquad i = \sqrt{-1}$$

c′5 Energía espectral $$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 \cdot d\omega$$

Reglas de operación

c′6 Desplazamiento en tiempo $$F\{s(t-\tau)\} = S(\omega)\cdot e^{-i\omega\tau}; \quad i = \sqrt{-1}$$

c′7 Convolución $$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\cdot s_2(t-\tau)\cdot d\tau$$

c′8 $$= \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(\tau)\cdot s_1(t-\tau)\cdot d\tau$$

c′9 $$F\{s_1(t) * s_2(t)\} = S_1(\omega)\cdot S_2(\omega)$$

c′10 $$F\{s(t)\} = S(\omega)$$

c′11 $$F\{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{\omega}{a}\right) \text{ siempre que } a > 0$$

c′12 $$F\{s_1(t) + s_2(t)\} = S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

(continúa en C′2)

Transformadas de funciones

Transformadas de Fourier

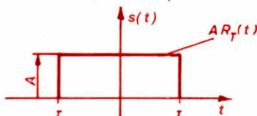
(continuación de **C′1**)

En seguida se indican las densidades espectrales calculadas para algunas importantes funciones del tiempo.

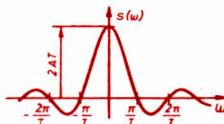
c′13 $$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot d\omega \; ; \qquad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

Función tiempo $s(t)$ | **Densidad espectral** $S(\omega)$

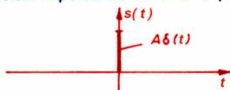
Función rectángulo $A\cdot R_T(t)$



$2AT\cdot \mathrm{sen}(\omega T)/(\omega T)$



Función impulso de Dirac $A\cdot\delta(t)$

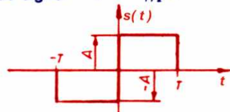


$S(\omega) = A$

(Densidad espectral constante sobre ω)

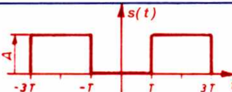
c′14 **Función rectángulo con cambio de signo** | $A\cdot R_{T/2}(t-T/2) - A\cdot R_{T/2}(t+T/2)$

c′15



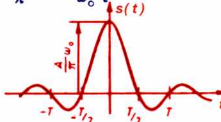
$$S(\omega) = -j\,2AT\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\dfrac{\omega T}{2}}{\dfrac{\omega T}{2}}$$

c′16

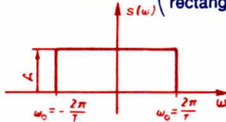


$$S(\omega) = 4AT\cdot\cos(2\omega T)\frac{\mathrm{sen}(\omega T)}{\omega T}$$

c′17 $s(t) = \dfrac{A}{\pi}\,\omega_0\dfrac{\mathrm{sen}(\omega_0\cdot t)}{\omega_0\, t}$ con $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$



$S(\omega) = A\cdot R_{\omega_0}\cdot(\omega)$ (Función rectángulo)



(continúa en C′3)

Transformadas de Fourier

(continuación de C′2)

	Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(\omega)$
c′18	Función triángulo $A\ D_T(t)$	$S(\omega) = \left(\dfrac{\text{sen}\,(T\omega/2)}{T\omega/2}\right)^2 \cdot A\,T$
c′19 c′20	Rectángulo modulado $A \cdot R_T(t)\ \cos(\omega_0 t)$ $\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{a \cdot T}$	$S(\omega) = A \cdot \dfrac{\text{sen}\ T(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0} + A \cdot \dfrac{\text{sen}\ T(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0}$
c′21 c′22	Impulso de Gauss $A\ e^{-a^2 t^2}$	$S(\omega) = \dfrac{A}{a} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}$
c′23 c′24	Impulso cos $A\ \cos(\omega_0 t)$ $\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$	$S(\omega) = \dfrac{A\ T}{\pi} \cdot \dfrac{\cos\left(\frac{T}{4}\omega\right)}{1 - \left(\frac{T}{2\pi}\omega\right)^2}$
c′25 c′26	Impulso cos² $A^2\ \cos^2(\omega_0 t)$ $\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$	$S(\omega) = \dfrac{A\ T}{4} \cdot \dfrac{\text{sen}\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\left(\omega\frac{T}{4}\right)} \times \dfrac{1}{1 - \frac{T^2 \cdot \omega^2}{16\pi^2}}$
c′27 c′28	Impulso exponencial	$S(\omega) = \dfrac{A}{j\,\omega + a}$

Transformadas de funciones — C′4

Transformada de Laplace

Generalidades: Con la transformada de Laplace $L\{f(t)\}$ se representa (o transforma) la función $f(t)$, con ayuda de la integral

c′29 $$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

en una función imagen; $f(t)$ debe ser nula para $t < 0$ y para $t \geq 0$ debe estar totalmente definida; e^{-pt} es un factor de amortiguación que hace que la integral converja para un gran número de funciones del tiempo. Se tiene que $p = \sigma + i\omega$ $(\sigma \geq 0)$ es una variable compleja de operación. En este dominio de la imagen pueden resolverse ecuaciones diferenciales y analizarse procesos no periódicos (por ejemplo, vibraciones). El comportamiento de la función tiempo se obtiene por medio de la transformada inversa (véase la tabla **C′6**).

Definiciones

c′30 $$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-pt} dt$$

c′31 $$L^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(p)\, e^{pt} \cdot dp$$

Representación abreviada: $f(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet F(p)$

Representación abreviada: $F(p) \bullet\!\!-\!\!-\!\!\circ f(t)$

Reglas de operación

c′32	Linealidad	$L\{f_1(t) + f_2(t)\}$	$= F_1(p) + F_2(p)$
c′33		$L\{c \cdot f_1(t)\}$	$= c \cdot F_1(p)$
c′34	Teorema de traslación	$L\{f(t - a)\}$	$= e^{-ap} \cdot F(p)$
c′35	Teorema de convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$= \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) \cdot d\tau$
			$= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau$
c′36		$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
c′37	Cambio de variable	$L\left\{\frac{1}{a}\ f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$	$= F(a \cdot p)$
c′38	Diferenciación	$L\{f'(t)\}$	$= p \cdot F(p) - f(0^+)$
c′39		$L\{f''(t)\}$	$= p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0^+)$
c′40		$L\{f^n(t)\}$	$= p^n \cdot F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+)\, p^{n-k-1}$
c′41	Integración	$L\left\{\int_0^t f(t) \cdot dt\right\}$	$= \frac{1}{p} F(p)$

Transformadas de funciones | C′5

Transformada de Laplace

Empleo de la transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales

Esquema de operación



c′44 El problema de resolver las ecuaciones diferenciales se reduce al de hallar una transformada inversa; esta operación se simplifica expresando $Y(p)$ en fracciones parciales (véase **B′1**), o en funciones cuyas transformadas inversas al dominio del tiempo puedan encontrarse ya tabuladas (véase la tabla en **C′6**).

Ejemplo: $2y' + y = f(t)$; $f(t)$ es la función de excitación, $y(0^+) = 2$, es la condición inicial

Según c′38, c′42: $2p \cdot Y(p) - 2y(0^+) + Y(p) = F(p)$

Según c′43: $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(p) = \dfrac{F(p) + 2y(0^+)}{1 + 2p} = \dfrac{1/p + 2y(0^+)}{1 + 2p}$

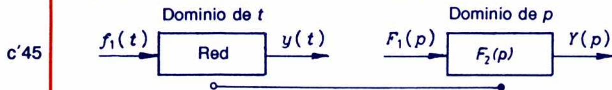
Según sea $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(p)$ se obtienen diferentes soluciones para $y(t)$. (Supongamos que $f(t)$ sea la función escalón. Según **C′50** es entonces $F(p) = 1/p$).

$$\text{Según B′1}\ \Big\}\ Y(p) = \frac{1}{p(1+2p)} + \frac{2y(0^+)}{1+2p} = \frac{1}{p} - \frac{2}{1+2p} + \frac{2y(0^+)}{1+2p}$$

$$\text{y según C′6,}\quad y(t) = 1 - 2\,\frac{1}{2}\,e^{-t/2} + 2 \cdot 2\,\frac{1}{2}\,e^{-t/2} = 1 + e^{-t/2}$$

Aplicación del teorema de convolución de la transformada de Laplace a redes lineales

Una función de excitación $f_1(t)$ se transforma a través de una red en una respuesta $y(t)$. La red se caracteriza por la función de transferencia $F_2(p)$; $F_2(p)$ tiene la transformada inversa $f_2(t)$.



c′46 $y(t) = f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(p) = F_1(p) \cdot F_2(p)$

La respuesta $y(t)$, para una red dada, depende de $f_1(t)$; $y(t)$ puede calcularse según el esquema después de obtener $Y(p)$. La transformada inversa en el dominio de t puede obtenerse en forma cerrada si $F_2(p)$ está dada como una función racional de p y la transformada $F_1(p)$ puede obtenerse de la tabla en **C′6**.

Transformadas de funciones

Transformada de Laplace

Tabla de correspondencia

c′47 $$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt\,; \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(p)\cdot e^{pt}\cdot dp$$

con $p = i\omega = i\,2\pi f\,;\quad i = \sqrt{-1}$

	Función imag $F(p)$	Función del tiempo $f(t)$	Función imagen $F(p)$	Función del tiempo $f(t)$
c′48	1	$\delta(t)$ ≙ Dirac	$\frac{p^2}{(p^2+k^2)^2}$	$\frac{1}{2k}\,\mathrm{sen}(kt) + \frac{t}{2}\cos(kt)$
c′49 c′50 c′51	$1/p$	1 para $t>0$; 0 para $t<0$ (Función escalón)		
c′52 c′53	$1/p^2$	t	$\frac{p^3}{(p^2+k^2)^2}$	$\cos(kt) - \frac{k}{2}t\cdot \mathrm{sen}(kt)$
c′54	$1/p^n$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	para $b \neq a$: $\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
c′55 c′56	$1/(p-a)$	$\exp(at)$		
c′57 c′58	$1/(p-a)^2$	$t\,\exp(at)$	$\frac{1}{(p+a)^2+k^2}$	$\frac{1}{k}e^{-at}\cdot \mathrm{sen}(kt)$
c′59 c′60 c′61	$\frac{a}{p(p-a)}$	$\exp(at)-1$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot t}}$
c′62 c′63	$\frac{1}{1+T\cdot p}$	$\frac{1}{T}\exp(-t/T)$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
c′64 c′65	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\mathrm{senh}(at)$	$\sqrt{p}$	$-1/(2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2})$
			$p\sqrt{p}$	$3/(4\sqrt{\pi}\cdot t^{5/2})$
c′66 c′67	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\cosh(at)$	$\ln\frac{p+b}{p+a}$	$\frac{1}{t}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
c′68 c′69	$\frac{k}{p^2+k^2}$	$\mathrm{sen}(kt)$	$\tan^{-1}(a/p)$	$1/t\cdot \mathrm{sen}(at)$
c′70 c′71	$\frac{p}{p^2+k^2}$	$\cos(kt)$	para $a>0$: $e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{a}{2t\sqrt{\pi t}}\,e^{\frac{-a^2}{4t}}$
c′72 c′73	$\frac{1}{(p^2+k^2)^2}$	$\frac{1}{2k^3}\,\mathrm{sen}(kt) - \frac{1}{2k^2}\,t\cos(kt)$	para $a \geq 0$: $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$	$\mathrm{erfc}\,\frac{a}{2\sqrt{t}}$
c′74/ c′75	$\frac{p}{(p^2+k^2)^2}$	$\frac{1}{2k}\,\mathrm{sen}(kt)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+k^2}}$	$J_0(kt)$ Función de Bessel

Ecuaciones diferenciales — D′1

Conceptos generales

Concepto de ecuación diferencial (ED)

Una ED es una ecuación que contiene funciones, derivadas (o diferenciales) de estas funciones y además variables independientes. Hay que distinguir entre:

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en las que las funciones buscadas dependen sólo de una variable independiente; por ejemplo.:

d′1 $$y'' + 2x^2y = \operatorname{sen} x \qquad\qquad y = f(x)$$

Ecuaciones diferenciales parciales (EDP), en las que las funciones buscadas dependen de diversas variables independientes; por ej.:

d′2 $$\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} = x^2 \cdot v \cdot w \, \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \qquad\qquad x = f(u, v, w)$$

Las EDP no se exponen aquí en forma separada, ya que los métodos de las EDO pueden aplicarse a ellas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

d′3 **Forma:** $F\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ \dots\ y^{(n)}(x)\right) = 0.$

En esta expresión $y(x)$ es la función buscada; $y' \dots y^{(n)}$ son la primera y sucesivas derivadas hasta de orden n, con x como variable independiente.

d′4 *Ejemplo:* $y'''(x) + m(x) \cdot y'(x) + n(x)y^2(x) + p(x)y = q(x).$

d′5 *Orden:* es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ED. En el ejemplo anterior, el orden de la ED es 3.

d′6 *Grado:* es el exponente de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación al expresar ésta en forma polinomial, o sea, al racionalizarla.

d′7 *ED lineal* (EDL): es una ED en la que las funciones desconocidas y sus derivadas aparecen sólo elevadas a la primera potencia; las ED lineales son siempre de primer grado.

d′8 *ED homogénea:* en ésta la función forzante o de perturbación $q(x)$ es igual a 0; es decir, $q(x) = 0$.

d′9 *ED no homogénea*: en ésta, $q(x) \neq 0$.

d′10 *Solución:* es una función, $y = y(x)$, que junto con sus derivadas satisface idénticamente la ED.

La *integración* de una ecuación diferencial es el proceso de encontrar soluciones.

Integral general de una ED es el conjunto total de sus soluciones. La integral general de una ED de orden n contiene n constantes arbitrarias: C_1, C_2, ..., C_n. Tales constantes adquieren valores definidos cuando se especifican las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$;

d′11 $y'(x_0) = y'_0 \dots y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}$.

La *integral particular* de una ecuación diferencial es una solución específica de la ecuación.

Métodos para resolver una ED

1. Transformando y ordenando la ecuación de manera que pueda identificarse con un cierto tipo de ecuación para la cual existan soluciones (Véase **D′6**, **D′8**, ..., **D′12**).
2. Empleo de una sustitución especial (Véase **D′8**)
   Efectuando tal sustitución, la ED con frecuencia puede reducirse a una de menor orden o grado para la que exista una solución conocida (Véase **D′9**, ..., **D′12**).
3. Empleo del método de los operadores, en especial de la transformada de Laplace (Véase **C′ 4** ... **C′ 6**).

Ecuaciones diferenciales lineales (EDL)

d′12 **Forma:** En esta ecuación, $y = y(x)$ es la función buscada; $y' \ldots y^n$ son la primera y sucesivas derivadas hasta la de orden n de $y(x)$; $p_1(x) \ldots p_n(x)$, son funciones de x.

Solución general de la EDL no homogénea

d′13

$$y = y_{hom} + y_{part}$$

Solución de la ED homogénea: y_{hom}.

La y_{hom} se obtiene resolviendo la ED no homogénea en la que se hace $q(x) = 0$. Toda ED lineal homogénea de orden n posee n soluciones independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ con n constantes arbitrarias independientes $C_1, \ldots, C_n$.

d′14

$$y_{hom} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

(En **D′9** ... **D′12** se dan las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo órdenes).

Solución particular de la ED no homogénea: y_{part}.

La y_{part} se obtiene para $q(x) \neq 0$.

En **D′3**, **D′6** y **D′7** se indican procedimientos para encontrar estas soluciones; en **D′9** y **D′12** se dan algunas soluciones para la y_{part} de ED lineales de primero y segundo órdenes.

Solución particular

Obtención con el método de la variación de parámetros

Si se conoce la y_{hom} de una EDL de orden n (véase **D′2**, **D′6**), la siguiente sustitución conduce siempre a una solución particular:

d′15 $$y_{part} = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n(x)\cdot y_n.$$

Método para la determinación de $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$:

Fórmese el sistema de ecuaciones simultáneas:

d′16 $$\begin{aligned} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n &= 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)} &= 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} &= q(x) \end{aligned}$$

d′17 Determínense las $C_i'(x)$ para $i = 1, 2, \ldots n$ del sistema anterior de ecuaciones simultáneas.

d′18 Intégrense las $C_i'(x)$ para $i = 1, 2, \ldots n$ a fin de obtener las $C_i(x)$ de la sustitución hecha para y.

Ejemplo: Encontrar la y_{part} de la ED:

d′19 $$y'' + \frac{1}{x}y' = 2x.$$

d′20 Según **d′111** $$y_{hom} = \int C_1 e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\cdot dx + C_2 = C_1\cdot \ln|x| + C_2$$

d′21 $$= C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x)$$

en donde $y_1(x) = \ln|x|$ y $y_2(x) = 1$

d′22 Sustitución: $$y_{part} = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$$

d′23 Sistema de ecuaciones simultáneas indicado en **d′16** $$\begin{cases} C_1'(x)\cdot \ln|x| + C_2'(x)\cdot 1 = 0 \\ C_1'(x)\cdot \frac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = 2x \end{cases}$$

d′24 Resolviendo el sistema se obtiene: $C_1'(x) = 2x^2$; $C_2'(x) = -2x^2\cdot \ln|x|$

Integrando $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$

d′25 $$C_1(x) = \frac{2}{3}x^3; \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}x^3\left[\ln|x| - \frac{1}{3}\right]$$

La solución buscada

d′26 es entonces: $$y_{part} = \frac{2}{3}x^3\cdot \ln|x| - \frac{2}{3}x^3\left(\ln|x| - \frac{1}{3}\right)\cdot 1 = \frac{2}{9}x^3$$

Solución general:

d′27 $$y = y_{hom} + y_{part} = C_1\cdot \ln|x| + C_2 + \frac{2}{9}x^3.$$

Comprobación: $$y' = \frac{C_1}{x} + \frac{2}{3}x^2 \qquad y'' = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{4}{3}x$$

$$y'' + \frac{y'}{x} = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{4}{3}x + \frac{C_1}{x^2} + \frac{2}{3}x = 2x$$

Ecuación diferencial lineal de primer orden

d′28 **Forma:** $y' + p(x)y = q(x)$.

La forma corresponde a la dada en **D′2, d′12** para $n = 1$; la derivada de mayor orden que aparece es y'. En **D′2** y **D′9** se dan soluciones para y, y_{hom}, y_{part}.

d′29 **Ejemplo:** $y' + \frac{y}{x} = \text{sen}\, x \qquad y = y_{hom} + y_{part}$

d′30 Según **d′100**, $p(x) = \frac{1}{x} \qquad q(x) = \text{sen}\, x$.

Según **d′99**, la solución homogénea es:

d′31 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C_1 \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{C_1}{x} \qquad \text{con} \qquad C_1 \gtrless 0.$$

Según **d′100**, la solución particular se calcula con la expresión:

d′32 $$y_{part} = \int \text{sen}\, x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot dx \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx}$$
$$= \int (\text{sen}\, x \cdot e^{\ln|x|})\, dx \cdot e^{-\ln|x|} = \int (\text{sen}\, x \cdot x) dx \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{x} \text{sen}\, x - \cos x$$

d′33 $$y = y_{hom} + y_{part} = \frac{1}{x}(C_1 + \text{sen}\, x) - \cos x.$$

Comprobación: $$y' = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{x \cos x - \text{sen}\, x}{x^2} + \text{sen}\, x$$
$$y' + \frac{y}{x} = \text{sen}\, x$$

d′34 $C_1 \gtrless 0$; C_1 adquiere un valor definido, si por ejemplo

d′35 $$y(x_0) = 1 \text{ para } x_0 = \frac{\pi}{2}$$

d′36 entonces $$1 = \frac{1}{\pi/2}\left(C_1 + \text{sen}\, \frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{\pi}{2}.$$

d′37 por lo que $$C_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden

d′38 **Forma:** $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x)$

La forma corresponde a la dada en **D′2, d′12** para $n = 2$; la mayor derivada que aparece es y''. En **D′11** y **d′12** se dan las soluciones para y, y_{hom} y_{part}.

Ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

Debido a la gran importancia que tiene este tipo de ED en los problemas de vibraciones, se presentan a continuación varios casos especiales de ella.

d'39 **Forma:** $y'' + 2ay' + b^2 \cdot y = q(x).$

a y *b* con constantes,
q(*x*) es la función de perturbación.

Solución general: Según **D'2** y **d'15**

d'40 $$y = y_{hom} + y_{part}$$

d'41 Caso aperiódico: $k^2 = a^2 - b^2 > 0$

d'42 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{(-a+k)x} + C_2 \cdot e^{(-a-k)x}$$

d'43 $$y_{part} = \frac{e^{(-a+k)x}}{2k} \cdot \int e^{(a-k)x} \cdot q(x) \cdot dx - \frac{e^{(-a-k)x}}{2k} \cdot \int e^{(a+k)x} \cdot q(x) \cdot dx \quad {}^{*)}$$

d'44 Caso aperiódico límite: $k^2 = a^2 - b^2 = 0$

d'45 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{-ax} + C_2 \cdot x \cdot e^{-ax}$$

d'46 $$y_{part} = -e^{-ax} \int x \cdot e^{ax} \cdot q(x) \cdot dx + x \cdot e^{-ax} \int e^{ax} \cdot q(x) \cdot dx \quad {}^{*)}$$

d'47 Caso periódico: $k^2 = a^2 - b^2 < 0$

d'48 $$y_{hom} = e^{-ax}[C_1 \cdot \text{sen}(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)]$$

con $\omega = \sqrt{b^2 - a^2}$

d'49 $$y_{part} = \frac{e^{-ax} \cdot \text{sen}(\omega x)}{\omega} \cdot \int e^{ax} \cdot \cos(\omega x) \cdot q(x) \cdot dx - \frac{e^{-ax} \cdot \cos(\omega x)}{\omega} \cdot \int e^{ax} \cdot \text{sen}(\omega x) \cdot q(x) \cdot dx \quad {}^{*)}$$

*) Observación: Para el caso especial en que $q(x) = A_0 \,\text{sen}\,(\omega_0 x)$, se obtiene:

d'50 $$y_{part} = A \cdot \text{sen}\,(\omega_o x - \gamma),$$

d'51 en donde $$A = \frac{A_o}{\sqrt{(b^2 - \omega_o^2)^2 + 4a^2\omega_o^2}}$$

d'52 y también $$\gamma = \cot^{-1} \frac{b^2 - \omega_o^2}{2a\,\omega_o}$$

Ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes

d'53 **Forma:** $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q(x).$

Solución de la EDL homogénea de orden n con coeficientes constantes,

d'54 $q(x) = 0$).

d'55 **Sustitución:** $y = e^{rx}; \quad y' = r \cdot e^{rx}; \quad \ldots y^{(n)} = r^n \cdot e^{rx}$

Sustituyendo estas expresiones en la ED homogénea dada en **d'53**, se obtiene la ecuación algebraica

d'56 $$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0.$$

De esta ecuación pueden obtenerse las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dependiendo del tipo de las mismas, se obtienen diferentes soluciones para la y_{hom}:

Caso a): Todas las $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son reales y diferentes entre sí:

d'57 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x} + \ldots + C_n \cdot e^{r_n \cdot x} \quad ^{*)}$$

Caso b): Aparecen raíces múltiples y sencillas:

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_m; \quad r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots r_n.$$

d'58 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_3 x^2 \cdot e^{r_1 \cdot x} + \ldots + C_m \cdot x^{m-1} \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_{m+1} \cdot e^{r_{m+1}} + \ldots + C_n \cdot e^{r_n \cdot x} \quad ^{*)}$$

d'59 $$= e^{r_1 \cdot x} (C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_m \cdot x^{m-1}) + C_{m+1} \cdot e^{r_{m+1} \cdot x} + \ldots + C_n \cdot e^{r_n \cdot x}.$$

Caso c): Aparecen raíces complejas conjugadas:

$$r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta = \overline{r_1}.$$

d'60 $$y_{hom} = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x} \quad ^{*)}$$
$$= e^{\alpha x} \cdot (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \operatorname{sen} \beta x)$$

$$A = C_1 + C_2; \quad B = i(C_1 - C_2)$$

Solución particular de la ED no homogénea de orden n con coeficientes constantes

d'61 $$y_{part} = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x).$$

Para encontrar soluciones particulares se utilizan expresiones que dependen de la forma de $q(x)$. En **D'7** se dan algunas de estas expresiones. Una vez determinada la expresión correspondiente para y_{part}, se obtienen y_{part}, y'_{part}, etc., y se sustituyen en la ED por resolver. Igualando coeficientes similares, pueden determinarse las incógnitas α y β. (Véase el ejemplo en **D'7**).

*) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Ecuaciones diferenciales — D′7

Ecuaciones diferenciales lineales

Ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes constantes

	Forma de $q(x)$	Expresión por sustituir para la y_{part} =
d′62	A	α
d′63	x^m	$\alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$
d′64	$A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$	$\alpha_o + \alpha_1 \quad + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$
d′65	$A \cdot e^{\lambda x}$	$\alpha \cdot e^{\lambda x}$
d′66	$A \cdot \cos mx$	$\alpha \cdot \cos mx + \beta \cdot \text{sen}\, mx$
d′67	$B \cdot \text{sen}\, mx$	" + "
d′68	$A \cdot \cos mx + B \cdot \text{sen}\, mx$	" + "
d′69	$A \cdot \cosh mx$	$\alpha \cdot \cosh mx + \beta \cdot \text{senh}\, mx$
d′70	$B \cdot \text{senh}\, mx$	" + "
d′71	$A \cdot \cosh mx + B \cdot \text{senh}\, mx$	" + "
d′72	$A \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos mx$	$\alpha \cdot e^{\lambda x} \cos mx + \beta e^{\lambda x}\, \text{sen}\, mx$
d′73	$B \cdot e^{\lambda x} \cdot \text{sen}\, mx$	" + "
d′74	$A \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos mx + B \cdot e^{\lambda x} \cdot \text{sen}\, mx$	" + "

d′75 *Ejemplo*: $y'' - y = \cos 2x$; según **D′6, d′55**:

d′76 $y = e^{rx}; \qquad y' = r \cdot e^{rx}; \qquad y'' = r^2 \cdot e^{rx}$

Sustituyendo en la ED homogénea correspondiente (**d′75**)

d′77 $r^2 - 1 = 0; \quad r^2 = 1; \quad r_1 = 1; \quad r_2 = -1$

d′78 $y_{hom} = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$.

La expresión por sustituir es de la forma:

d′79 $y_{part} = \alpha \cdot \cos 2x + \beta \cdot \text{sen}\, 2x$

d′80 $y'_{part} = -2\alpha \cdot \text{sen}\, 2x + 2\beta \cdot \cos 2x$

d′81 $y''_{part} = -4\alpha \cdot \cos 2x - 4\beta \cdot \text{sen}\, 2x$;.

Sustituyendo las expresiones dadas en **d′79** y **d′81** en la ED, **d′75**, se

d′82 obtiene: $-5\alpha \cdot \cos 2x - 5\beta \cdot \text{sen}\, 2x = \cos 2x$.

Al igualar coeficientes similares resulta:

d′83 $\beta = 0 \,; \quad \alpha = -\frac{1}{5}$ por lo que $y_{part} = -\frac{1}{5} \cos 2x$

Solución general:

d′84 $y = y_{hom} + y_{part} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{5} \cos 2x$

Comprobación: $y' = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{5}\, \text{sen}\, 2x \cdot 2$

$y'' = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot \cos 2x$

$y'' - y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot \cos 2x - C_1 \cdot e^x$

$- C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{5} \cos 2x = \cos 2x$

Reducción del orden por sustitución de variable para la resolución de una ED de orden n

	Forma de la ED	Suposición	Sustitución	Observación
d'85	$y^{(n)} = f(y, y', \dots y^{(n-1)})$ (Véase ejemplo A)	x no está contenida explícitamente	$y' = p = \frac{dy}{dx}$ $y'' = p' = \frac{dp}{dy} \cdot p$	Reducción del orden n al $n-1$
d'86	$y^{(n)} = f(x, y', \dots y^{(n-1)})$	y no está contenida explícitamente	$y' = p$ $y'' = \frac{dp}{dx}$	Reducción del orden n al $n-1$
d'87	$y^{(n)} = f(x, y^{(k+1)}, \dots y^{(n-1)})$ (Véase ejemplo B)	Las derivadas de orden 1 hasta la de orden k, no están presentes	$y^{(k+1)} = p$ $y^{(k+2)} = p' = \frac{dp}{dx}$	Reducción del orden n al $n-k$

Ejemplo A:

d'88 $y \cdot y'' - y'^2 = 0;$

d'89 Sustitución: $y' = p; \quad y'' = p\,\frac{dp}{dy}$

d'90 $y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = 0; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$

d'91 $\ln|p| = \ln|y| + \ln C$

d'92 $\ln|p| = \ln C \cdot y = \frac{dy}{dx} = y'$

d'93 $p = C \cdot y = y'$

d'94 $y' - C \cdot y = 0$

d'95 $y = C_1 \cdot e^{-\int C \cdot dx} = C_1 \cdot e^{-C \cdot x}$

Comprobación: $y' = -C_1 \cdot e^{-Cx} \cdot C$

$y'' = C_1 \cdot C^2 \cdot e^{-Cx}$

$y \cdot y'' - y'^2 = C_1 \cdot e^{-Cx} \cdot C_1 \cdot C^2 \cdot e^{-Cx} - C_1^2 \cdot C^2 \cdot e^{-Cx \cdot 2} = 0$

Ejemplo B:

$y''' + 2y'' - 4x = 0.$

Sustitución: $y'' = p; \quad y''' = \frac{dp}{dx} = p'$

$p' + 2p - 4x = 0,$ según **d'100**

$p = C_1 \cdot e^{-2x} + 2x - 1 = \frac{d}{dx} \cdot y' = y''$

$y' = \int (C_1 \cdot e^{-2x} + 2x - 1)\,dx + C_2$

$y' = -\frac{C_1}{2} \cdot e^{-2x} + x^2 - x + C_2 = \frac{dy}{dx}$

$y = \int (-\frac{C_1}{2} \cdot e^{-2x} + x^2 - x + C_2)\,dx + C_3$

$y = \frac{1}{4} C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_3$

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales de primer orden

D′9

	Tipo	Forma	Expresión por sustituir	Solución	Observación
d′96	De variables separables	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$		$\int g(y) \cdot dy = \int f(x) \cdot dx + C$	Las variables *x* así como *y* pueden separarse por el signo igual
d′97	De variables no directamente separables	$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$	$\alpha x + \beta y + \gamma = u$ $\frac{du}{dx} = \alpha + \beta y'$ $y' = \frac{1}{\beta}(\frac{du}{dx} - \alpha)$	$\int dx = \int \frac{du}{\beta f(u) + \alpha} + C$	Después de integrar es necesario resustituir
d′98	ED similar	$y' = f(\frac{y}{x})$	$\frac{y}{x} = u$ $y' = u + x \cdot \frac{du}{dx}$	$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u} + C$	Revisar si la ED es transformable en $f(\frac{y}{x})$
d′99	ED lineal homogénea de orden 1	$y' + p(x) \cdot y = 0$		$y = C \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = y_{hom}$	$y = y_{hom}$
d′100	ED lineal no homogénea de orden 1	$y' + p(x) \cdot y = q(x)$	$y = y_{hom} + y_{part}$ $y_p = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ $y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$	$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx\right]$ en donde $y_p = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx \cdot e^{-\int p(x)dx}$	y_{hom}, véase **d′99** Obtención de la sol. part. por variación de las constantes; véase **D′2** y **D′3**
d′101	ED implícita de orden 1, sin term. en *x*	$y = f(y')$	$y' = p$	$x = \int \frac{f'(p) \cdot dp}{p} + C$ $y = f(p)$	Eliminando *p* se obtiene la solución de la representación paramétrica

	Tipo	Forma	Expresión por sustituir	Solución	Observación
d'102	ED implícita de orden 1, sin term. en y	$x = f(y')$	$y' = p$	$x = f(p)$ $y = \int p \cdot f'(p) \cdot \mathrm{d}p + C$	Eliminando p se obtiene la sol. de la repr. paramétrica
d'103	ED de d'Alambert, implícita de orden 1	$y = x \cdot g(y') + f(y')$	$y' = p$	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{g'(p)}{p - g(p)} x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}$	
d'104	ED de Clairaut	$y = x \cdot y' + f(y')$	$y' = p$ $f(y') = f(p)$	con $C_1 = y'$: $y = x \cdot C_1 + f(C_1)$ (Integral general: familia de rectas) $x = -f'(p)$ $y = -p \cdot f'(p) + f(p)$	Repr. paramétrica de x y y. Integral sing. (envolvente) por elim. de p
d'105	ED de Bernoulli de orden 1 y grado n	$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0$ con $n \neq 0$; $n \neq 1$	$z = y^{1-n}$ $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ $y' = \frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z'$	$\frac{1}{1-n} z' + p(x) \cdot z = -q(x)$ $z = e^{-\int (1-n) p(x) \cdot \mathrm{d}x} \left[C - (1-n) \cdot \int q(x) \cdot e^{\int (1-n) p(x) \cdot \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right]$ $y = z^{\frac{1}{1-n}} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}}$	Reducción a una ED de orden 1 en z; sol. según **D'9, d'100**
d'106	ED de Ricatti de orden 1 y grado 2	$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$	$y(x) = u(x) + y_1(x)$ $y(x)$ es una sol. part. conocida $z(x) = \frac{1}{u(x)}$	$z' - [p(x) + 2q(x) \cdot y_1(x)] \cdot z = q(x)$ $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{e^{+\int [p(x) + 2q(x) \cdot y_1(x)] \mathrm{d}x}} \cdot \frac{1}{\left[C + \int q(x) \cdot e^{-\int [p(x) + 2q(x) \cdot y_1(x)] \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right]}$	ED no homogénea en z; sol. según **D'9**. Al menos una sol. part. debe ser conocida

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

D'11

	Tipo	Forma	Expresión por sustituir	Solución	Observación
d'107	y así como y' no están presentes	$y'' = f(x)$		$y = C_1 + C_2 x + \int [\int f(x) \cdot dx] \cdot dx$	Empezar el cálculo con la integral interna
d'108	EDL homogénea de orden 2 con coefs. constantes	$y'' + a_1 y' + a_o y = 0$	$y = e^{rx}$ $y' = r \cdot e^{rx}$ $y'' = r^2 \cdot e^{rx}$	$y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} = y_{hom}$ con $r_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_o}$ o bien $y(x) = e^{\alpha x} (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \operatorname{sen} \beta x)$ con $r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta = \bar{r}_1$	C_1 y C_2 son constantes arbitrarias $A = C_1 + C_2$ $B = i\,(C_1 - C_2)$
d'109	EDL no homogénea de orden 2 con coefs. consts.	$y'' + a_1 y' + a_o y = q(x)$	$y = y_{hom} + y_{part}$	$y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} + y_{part}$ (si $r_1 \neq r_2$, véase d'110) o $y(x) = e^{\alpha x}(A \cdot \cos \beta x + B \cdot \operatorname{sen} \beta x) + y_{part}$ (si $r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta = \overline{r_1}$)	y_{part} depende de $q(x)$. Cálculo: véase D'6, D'7 y Observación d'110
d'110	ED de Euler, lineal homogénea, de orden 2	$x^2 \cdot y'' + b_1 x y' + b_o y = 0$	$y = x^r$ $y' = r \cdot x^{r-1}$ $y'' = r(r-1)x^{r-2}$	$y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 \cdot x^{r_2}$; $r_1 \neq r_2$ con $r_{1,2} = \frac{1-b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_1-1)^2}{4} - b_o}$ o bien $y(x) = x^{\alpha}[A \cdot \cos(\beta \cdot \ln\lvert x \rvert) + B \cdot \operatorname{sen}(\beta \cdot \ln\lvert x \rvert)]$ para $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$	C_1 y C_2 son constantes arbitrarias $A = C_1 + C_2$ $B = i(C_1 - C_2)$
d'111	EDL homogénea de orden 2; sin y explícita	$y'' + p_1(x) \cdot y' = 0$	$y' = u$ $y'' = \frac{du}{dx}$	$y = \int C_1 \cdot e^{-\int p_1(x) dx} \cdot dx + C_2 = y_{hom}$	Sol. por reducción primero a una de orden 1

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

D'12

	Tipo	Forma	Expresión por sustituir	Solución	Observación
d'112	EDL no homogénea de orden 2, sin y explícita	$y'' + p_1(x)y' = q(x)$	$y' = u$ $y'' = \frac{du}{dx}$ $y = y_h + y_p$	$y = \int \left[e^{-\int p_1(x)dx} \cdot \left(C_1 + \int q(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \cdot dx \right) \right] dx + C_2$ $y_p = \left[e^{-\int p_1(x)dx} \cdot \left(\int q(x)^{\int p_1(x)dx} \cdot dx \right) \right] dx$	Empezar el cálculo con las integrales internas
d'113	EDL homogénea de orden 2, sin y explícita	$y'' + p_1(x) \cdot f(y') = 0$	$y' = u\,; \quad y'' = \frac{du}{dx}$ $f(y') = f(u)$	$\int \frac{du}{f(u)} = -\int p_1(x) \cdot dx + C_1$ $y = \int u \cdot dx + C_2$	
d'114	ED de orden 2, sin y	$y'' = f(y)$	$y' = u(y)$ $y'' = u(y) \cdot \frac{du}{dy}$	$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y) \cdot dy + C_1}} + C_2$	
d'115	ED de orden 2, sin y'	$y'' = f(x, y')$	$y' = u(x)$	$\frac{du}{dx} = f(x,u);\ y = \int u(x) \cdot dx + C$	Suele ser irresoluble
d'116	ED de orden 2, sin x o bien sin y	$y'' = f(y')$	$y' = u$ $y'' = u'$ $f(y') = f(u)$	$x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1;\ y = \int \frac{u \cdot du}{f(u)} + C_2$	Después de eliminar u se obtiene la solución
d'117	ED de orden 2, sin x	$y'' = f(y,y')$	$y' = u$ $y'' = \frac{du}{dx} = f(y,u) = u\frac{du}{dy}$ $u = u(y)$ $y = y(x)$	$u\frac{du}{dy} = f(y,u)$ $x = \int \frac{dy}{u(y)} + C$	Al final se sust. $y' = \frac{dy}{dx}$ por u
d'118	EDL homogénea de orden 2	$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0$	$v(x) = \frac{y}{y_1(x)}$ $v'(x) = w = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1(x)}\right)$	Después de transformarla en: $y_1(x) \cdot w + [2y_1'(x) + p_1(x) \cdot y_1(x)]w = 0$ $y = y_1 \cdot v(x)$ $y = y_1(x)\left[\int C_1 \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int p_1(x) \cdot dx} \cdot dx + C_2\right]$	$y_1(x)$, como sol. part., debe ser conocida. Reducir luego a una lín. homog. de orden 1. Para $y_1(x)$, véase D'9

Análisis estadístico

Conceptos generales de probabilidad

Axiomas de probabilidad

e′1 $P(A)$ = Probabilidad del evento (o suceso) A

e′2 $= \dfrac{\text{Número de eventos en que ocurre } A}{\text{Número de eventos posibles}}$

= frecuencia relativa

e′3 $P(A)$ = 0, el suceso A es imposible

e′4 $\sum_i P(A_i)$ = 1, la suma de las probabilidades de todos los posibles eventos A_i tiene el valor 1.

e′5 $P(A \cup B)^{*)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)^{*)}$

Caso especial para eventos mutuamente excluyentes:

e′6 $= P(A) + P(B)$

e′7 $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)^{*)}$, probabilidad condicional de A (Probabilidad de A dada la probabilidad de B)

Caso especial para eventos independientes, con $P(B)$ o bien $P(A) \neq 0$:

e′8 $P(A/B) = P(A)$

e′9 $P(B/A) = P(B)$

e′10 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ para eventos independientes

e′11 $P(A \cap \bar{A}) = P(A) \cdot P(\bar{A}) = 0$, eventos mutuamente excluyentes.

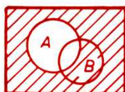
*) Diagramas de Venn para la representación de eventos

El rectángulo representa la totalidad de los eventos A_i:

Círculo mayor: evento $A \triangleq (A_1)$

Círculo menor: evento $B \triangleq (A_2)$

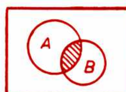
La superficie sombreada indica cada caso:



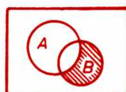
$\bar{A}$
(no A)



$A \cup B$
(A "o" B)



$A \cap B$
(A "y" B)



$\bar{A} \cap B$
(no A "y" B)

Variable aleatoria A

La variable aleatoria A puede tomar diversos valores x_i; cada valor x_i es un evento o suceso aleatorio. Se diferencia entre valores discretos y valores continuos de una variable aleatoria.

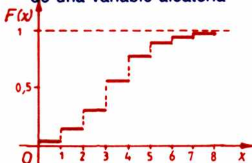
Función de distribución $F(x)$.

La función de distribución $F(x)$ indica la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria A sea menor que el valor correspondiente de la abscisa x. La función $F(x)$ es monótona creciente y

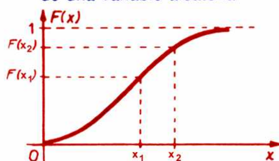
e′12 $$\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$$

e′13 $$F(-\infty) = 0; \quad F(x) \text{ crece de 0 a 1.}$$

$F(x)$ para valores discretos de una variable aleatoria

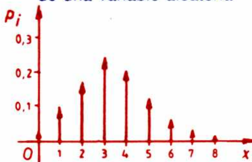


$F(x)$ para valores continuos de una variable aleatoria

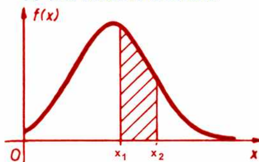


Función de densidad P_i, o bien $f(x)$.

P_i para valores discretos de una variable aleatoria



$f(x)$ para valores continuos de una variable aleatoria



La función de densidad de una variable aleatoria A está dada por p_i o por $f(x)$; su relación con la función de distribución es:

e′14/15 $$F(x) = \sum_{i<x} p_i \qquad\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

El área de la superficie sombreada de la función de densidad indica la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria A se encuentre en el intervalo de x_1 a x_2 (sin incluir a x_2).

e′16 $$P(x_1 \leqslant A < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

e′17 $$= F(x_2) - F(x_1) = P(A < x_2) - P(A < x_1)$$

Análisis estadístico — E'3

Conceptos especiales de probabilidad

Media $\overline{x}$ y valor esperado μ



Variable aleatoria A discreta	Variable aleatoria A constante
e'18 $\overline{x} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$	
e'19	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$
e'20 $= \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$	

en donde p_i y $f(x)$ son valores discretos y continuos, respectivamente, de la densidad de probabilidad.

Variancia σ^2

Variable aleatoria A discreta	Variable aleatoria A constante
e'21 $\sigma^2 = (x_1 - \overline{x})^2 \cdot p_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot p_2 +$	
e'22 $+ \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot p_n$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$
e'23 $= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i$	
e'24	$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \mu^2$
e'25 $= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \overline{x}^2$	

en donde p_i y $f(x)$ son valores discretos y continuos, respectivamente, de la densidad de probabilidad.

e'26 $\sigma = \sqrt{(\text{variancia})}$ es la *desviación estándar*.

Teorema del límite central (Ley de la adición).

Si A_i son variables aleatorias independientes distribuidas cada una arbitrariamente con media $(\overline{x}_i)$, o bien con un valor esperado μ_i y variancia σ_i^2, entonces

e'27 la variable aleatoria $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ tiene

e'28 el valor esperado (o media $\overline{x}$) $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ $\left(\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\right)$

e'29 la variancia $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$;

y además A tiene aproximadamente una distribución normal (véase e'48 y e'54), o sea:

e'30 $$P(A \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Ejemplo: El histograma de 10 mediciones, cada una de las cuales muestra una desviación estándar $\sigma = \pm\ 0.03\ \mu\text{m}$ (micrómetros), tiene entonces en conjunto una desviación estándar σ_g

$$\sigma_g^2 = 10\,\sigma^2 \; ; \quad \sigma_g = \pm\sigma\sqrt{10} \approx \pm 0{,}095\ \mu\text{m}$$

	Tipo de distribución	Densidad de probabilidad	Función de distribución acumulada	Valor esperado μ Media $\bar{x}$	Variancia σ^2	Forma de la función de densidad	Observaciones. Ambito de aplicación
e'31	Ecuación de definición	$f(x)$ continua	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \mu^2$		k: Número de fallas n: Tamaño de muestra x_i: Valor discreto de var. aleat. p: Probabilidad de falla
e'32		p_i discreta	$F(x) = \sum_{i<x} p_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \bar{x}^2$		
e'33	hipergeométrica	$P(k) = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $P(k)$ es la probabilidad de que al tomar n muestras de un total de N, exactamente k resulten defectuosas.	$\sum_{k<x} \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \dfrac{N-n}{N-1}(1-p)$	$P(k)$; $p = 0{,}04$; $p = 0{,}1$; $p = 0{,}2$; $N = 100$, $n = 20$; eje: 0, 5, 10, 15, k; 0.1, 0.2, 0.3, 0.4	N: Tamaño de la población pN: partes defectuosas en N Cálculo exacto pero laborioso
e'34	binomial	$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $P(k)$ es la probabilidad de que al tomar n muestras, exactamente k de ellas resulten defectuosas.	$\sum_{k<x} \binom{n}{x} p^k (1-p)^{n-k}$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$	$P(k)$; $n = 20$; $p = 0{,}1$; $p = 0{,}2$; $p = 0{,}5$; eje: 0, 5, 10, 15, k; 0.1, 0.2, 0.3	Hipótesis: Población sumamente grande. Durante el muestreo se mantiene la colección
e'35	de Poisson	$P(k) = \dfrac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$ $P(k)$ es la probabilidad de que al tomar n muestras, exactamente k de ellas resulten defectuosas. Aplicación: Curvas para la evaluación de muestreos, véase E'11.	$\sum_{k<x} \dfrac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$	$n \cdot p$	$n \cdot p$	$P(k)$; $n \cdot p = 1$; $n \cdot p = 5$; $n \cdot p = 10$; eje: 0, 5, 10, 15, k; 0.1, 0.2, 0.3	Hipótesis: Tamaño grande del muestreo y número pequeño de fallas, $n \cdot p$ = const. $n \to \infty$; $p \to 0$

(Continúa en E'5)

	Tipo de distribución	Densidad de probabilidad	Función de distribución acumulada	Valor esperado μ Media $\bar{x}$	Variancia σ^2	Forma de la función de densidad	Observaciones. Ambito de aplicación
e'36	Ecuación de definición	$f(x)$ continua	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \mu^2$		n: Tamaño del muestreo x_i: Valor discreto de una variable aleatoria p: Probabilidad de falla
e'37		p_i discreta	$F(x) = \sum_{i<x} p_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \bar{x}^2$		
e'38	exponencial	$f(x) = a \cdot e^{-ax}$ $a > 0$ $x \geq 0$	$1 - e^{-ax}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$		Caso especial de la distribución de Poisson para $x = 0$. Pregunta sobre la probabilidad sin falla. $n \to \infty$; $p \to 0$
		Aplicación en la teoría de la confiabilidad. Sustitución de $a \cdot x$ por la tasa de fallas λ multiplicada por el tiempo de prueba t (véase E'12).					
e'39	normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt$	μ	σ^2		Caso especial de la distribución binomial. $n \to \infty$: $p = 0.5 = \text{const.}$
		Aplicación frecuente en la práctica, pues muchos valores medidos muestran una distribución con forma de campana alrededor de un valor medio.					
e'40	uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$ $= 0$ para valores de x externos al intervalo	$F(x) = 0$ para $-\infty < x < a$ $= \frac{x-a}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		La variable aleatoria x puede tomar valores sólo en el intervalo a, b. Ahí todo valor es igualmente probable.
		Se emplea como modelo cuando sólo se conocen valores máximos y mínimos, y no se tiene información sobre la distribución intermedia.					

Determinación de σ para valores discretos dados

Método de cálculo

Según la ecuación e′23 se tiene:

e′41 $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i \qquad \text{con} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

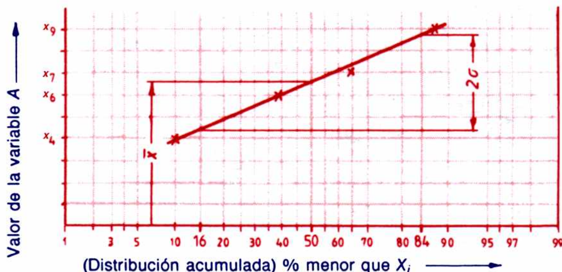
e′42 $$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \bar{x}^2$$

en donde x_i: valores medidos de la variable aleatoria *A*
P_i: probabilidad asociada a su ocurrencia.

Método gráfico

Si se supone que los valores medidos x_i de la variable aleatoria *A* están distribuidos normalmente, σ puede determinarse fácilmente con ayuda del papel para probabilidades. En este papel se escogen las divisiones de las escalas de manera que se obtenga una línea recta para una distribución normal.

Desarrollo: El total de los valores medidos de la variable aleatoria *A* se fija igual a 100%. Para cada uno de los valores x_i se calcula la frecuencia porcentual. De estos *i* valores se escogen, por ejemplo, 4, 2 en los bordes, y 2 a la mitad del espectro; en el dibujo son x_4, x_6, x_7 y x_9. Para cada uno de estos 4 valores se calcula qué % de los valores medidos son menores que los considerados en cada caso, y este valor porcentual se inscribe en la red (10% para x_4, 38% para x_6, etc.). Por estos puntos se traza una recta que corta a las frecuencias acumuladas de 16% y 84%. A estas abscisas corresponde un valor 2 σ. El valor medio se encuentra en el 50%.

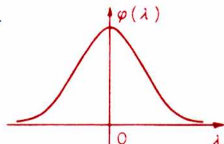


Análisis estadístico — E′7

Distribución normal de Gauss

Distribución normal de Gauss (Densidad de probabilidad)

La ecuación e′39 da para $\sigma^2 = 1$ y $\mu = 0$ la densidad de probabilidad normalizada con medida en $\lambda = 0$.



e′43 $$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{2}}$$

$\varphi(\lambda)$ puede leerse en las Tablas Z′5 y Z′6 para valores $0 \leq \lambda \leq 1{,}99$ o también calcularse directamente con la ecuación e′43.

La relación entre la densidad normalizada $\varphi(\lambda)$ y la densidad real $f(x)$, cuando $\mu \neq 0$ y $\sigma^2 \neq 1$, está dada por

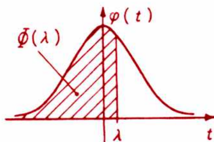
e′44 $$\frac{x-\mu}{\sigma} = \lambda \quad \text{según} \quad f(x) = \frac{\varphi(\lambda)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para calcularla, se busca en tablas un valor determinado de λ, el valor correspondiente de la densidad normalizada $\varphi(\lambda)$, y se encuentra después de dividir entre σ, el valor de tal densidad $f(x)$ asociada a x.

Los valores de μ y σ pueden obtenerse con las ecuaciones e′26 y e′58. En E′6 se muestra un método gráfico sencillo para determinar $f(x)$.

Distribución de Gauss normalizada $\Phi(\lambda)$ (Función de distribución)

La ecuación e′39 da para $\sigma^2 = 1$ y $\mu = 0$, la función de distribución normalizada de la distribución de Gauss.



e′45 $$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi(t) \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot dt$$

Como lím $\Phi(\lambda) = 1$ para $\lambda \to \infty$, y $\varphi(t)$ es una función simétrica, se cumple que

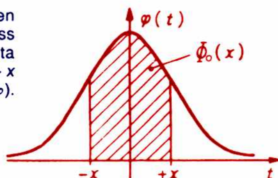
e′46 $$\Phi(-\lambda) = 1 - \Phi(\lambda)$$

La relación entre la función de distribución normalizada $\Phi(\lambda)$ y la función de distribución real $F(x)$, cuando $\mu \neq 0$ y $\sigma^2 \neq 1$, está dada por

e′47/48 $$\frac{t-\mu}{\sigma} = \lambda \quad \text{según} \quad F(x) = \frac{\Phi(\lambda)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt$$

Integral de probabilidad de Gauss

La integral de probabilidad se basa en la distribución normalizada de Gauss (e′45) con $\sigma^2 = 1$ y $\mu = 0$, representa el área de la superficie entre $-x$ y $+x$ de la función simétrica de densidad (φ).



e′49 $$\Phi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} \cdot dt$$

En las tablas Z′5 y Z′6 se dan valores de $\Phi_0(x)$ para $0 \leq x \leq 1.99$; para valores mayores de x, véase la aproximación indicada en la siguiente sección. La relación entre $\Phi_0(x)$ y la función de error está dada por

e′50 $\Phi_0(x) = \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})$.

Función de error

Z′5

e′51 $$\operatorname{erf}(x) = \Phi_0(x \cdot \sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

Z′6

e′52 $$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2n+1)} \cdot x^{2n+1}$$

En las tablas Z′5 y Z′6 se dan los valores de erf (x para $0 \leq x \leq 1.99$. Para $x \geq 2$ puede calcularse erf (x) con la serie anterior o también con la siguiente expresión aproximada:

e′53 $$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{a}{x \cdot e^{x^2}}$$

con

$a = 0{,}515$ para $2 \leq x \leq 3$
$a = 0{,}535$ para $3 \leq x \leq 4$
$a = 0{,}545$ para $4 \leq x \leq 7$
$a = 0{,}56$ para $7 \leq x < \infty$

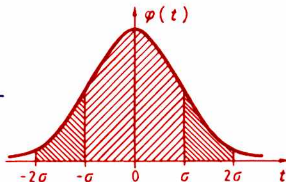
El área restante bajo la curva de campana es igual a:

e′54 $$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$$

$\Phi_0(x)$ y $[1 - \Phi_0(x)]$ en % del área total para valores especiales de x (según e′49):

e′55

x	$\Phi_0(x)/\%$	$[1-\Phi_0(x)]/\%$
$\pm\ \sigma$	68.26	31.74
$\pm\ 2\ \sigma$	95.44	4.56
$\pm\ 2.58\ \sigma$	99	1
$\pm\ 3\ \sigma$	99.73	0.27
$\pm\ 3.29\ \sigma$	99.9	0.1



Muestreo: Por razones de economía se renuncia a menudo a una revisión en 100% de todos los elementos de una población. En vez de esto se efectúan muestreos. Para que los elementos sean representativos del total, deben ser arbitrarios y tener la misma probabilidad de ser escogidos (ejemplo, por medio de un buen mezclado).
Objetivo del muestreo: Estimación de la posibilidad de la proporción verdadera de elementos defectuosos de una población, con base en el número de defectuosos o fallas detectadas en una muestra.

Distribución hipergeométrica: La probabilidad $P(k)$ de encontrar exactamente k elementos defectuosos en una muestra de tamaño n tomada de una población N, se calcula con la expresión.

e′56 $$P(k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad ; \qquad pN\text{: número entero}$$

en donde p es la probabilidad supuesta de tener un elemento defectuoso y pN es, por consiguiente, el número de defectuosos en N. La probabilidad de encontrar como máximo k defectuosos, o sea 0, 1, 2, ..., k, puede calcularse con la distribución hipergeométrica acumulativa:

e′57 $$\sum_{x=0}^{k} P(k) = P(0) + P(1) + \ldots + P(k)$$

$$= \sum_{x=0}^{k} \frac{\binom{pN}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad ; \qquad pN\text{: número entero}$$

Ejemplo:
En una población N de 300 tornillos, pueden como máximo ser desechables $p = 3\%$, o sea $pN = 3$. Se toman muestras de $n = 20$. ¿Cuántos defectuosos son permisibles, si la probabilidad $\sum P(k)$ es $\leq 90\%$?

x	$P(x)$	$\sum_{x=0}^{k} P(x)$
0	0.508	0.508
1	0.391	0.899
2	0.094	0.993
3	0.007	1.000

El cálculo muestra que se tiene sólo 1 defectuoso.

Otras distribuciones especiales: Además de la distribución hipergeométrica, la cual exige una gran cantidad de trabajo de cálculo, se han obtenido otras distribuciones especiales para determinadas hipótesis y condiciones de frontera. En E′4 y E′5 se muestran, además de la hipergeométrica, algunas de dichas distribuciones junto con sus características principales.

Seguridad de un muestreo — Curvas de aceptación

Seguridad de un muestreo: En una muestra de tamaño *n* tomada de una población de magnitud *N* se encuentran *k* elementos defectuosos. Sea *p* la probabilidad de tener un defectuoso en la población. La probabilidad de encontrar más de *k* defectuosos en la muestra se obtiene con la ecuación e′57:

e′58 $$P(x>k) = P(k+1) + P(k+2) + \ldots + P(n) = \sum_{x=k+1}^{n} P(x)$$

En el supuesto de que *N* es muy grande y $p<0{,}1$, − lo cual ocurre en un gran número de procesos industriales − puede efectuarse este cálculo (ver E′7) con ayuda de la distribución de Poisson:

e′59 $$P(x>k) = \sum_{x=k+1}^{x=n} \frac{(n\,p)^x}{x\,!}\cdot e^{-np} = 1 - \sum_{x=0}^{x=k} \frac{(n\,p)^x}{x\,!}\cdot e^{-np}$$

Esta probabilidad, para valores pequeños de *k*, se calcula fácilmente con la siguiente ecuación:

e′60 $$P(x>k) = 1 - \sum_{x=0}^{k} \frac{(np)^x}{x\,!}\cdot e^{-np} = 1 - e^{-np}\left[1 + \frac{np}{1\,!} + \frac{(np)^2}{2\,!} + \ldots + \frac{(np)^k}{k\,!}\right]$$

$P(x>k)$ se denomina también *seguridad del muestreo*. Con ayuda de la ecuación e′60 puede determinarse con qué seguridad $P(x>k)$, con una muestra de tamaño *n* y *k* defectuosos en ella, el porcentaje de partes defectuosas en la población total toma el valor $p = k/n$, o bien cuán grande debe ser la muestra *n* para que con *k* defectuosos aceptables y una cierta seguridad deseada, la probabilidad de fallas sea igual a *p*.

Curva característica de aceptación: Un usuario se pregunta si una población de objetos que recibe satisface sus requisitos de calidad, o bien si el fabricante ha entregado dicha población con la calidad convenida. Una prueba de 100% de la población es muy costosa y no siempre es posible efectuar ensayos no destructivos. Si se supone una probabilidad de fallas $p \leq p_0$ en la población, hay que determinar si se acepta tal población cuando al efectuar un muestreo de tamaño *n* se encuentran hasta $k = c$ partes defec-
e′61 tuosas. La probabilidad de aceptación $L(p,\,c) \geq 1 - \alpha$, en donde α es el riesgo del fabricante, puede calcularse en función de la probabilidad simple $P(k)$ dada por la ecuación e′57. (También se conoce esta curva como "CO".)

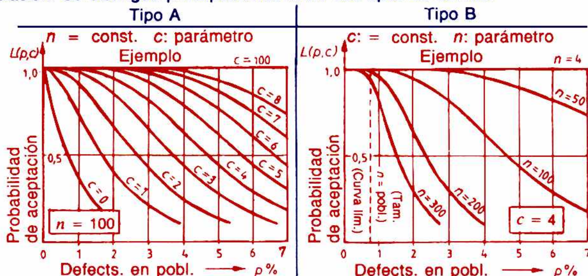
e′62 $$L(p,c) = P(0) + P(1) + \ldots + P(k=c)$$

e′63 Suponiendo una distribución de Poisson, según e′44
$$= \sum_{k=0}^{c} \frac{(np)^k}{k\,!}\, e^{-np} = e^{-np}\left[1 + np + \frac{(np)^2}{2\,!} + \ldots + \frac{(np)^c}{c\,!}\right]$$

(Continúa en E′11)

(Continuación de E′10)

Con esta fórmula pueden calcularse las diferentes curvas características de aceptación $L(p,c)$ en función del porcentaje de partes defectuosas p en la población. Se distingue principalmente entre dos tipos de curvas:

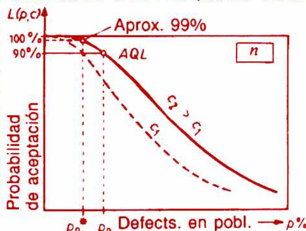


Observación: Cuanto menor sea el número máximo de defectuosos c en la muestra, tanto más se acerca la curva de aceptación al porcentaje de defectuosos Φ en la población; c debe ser $\leq n$.

Observación: Cuanto más inclinada es la curva de aceptación, tanto mayor es el tamaño de la muestra. Como curva límite se obtiene un rectángulo cuando n es el tamaño de la población. Cuanto más inclinada es la curva de aceptación, tanto más estricta es la prueba; n debe ser $\geq c$.

Valor AQL (Acceptable quality level = Nivel aceptable de calidad):

El acuerdo entre el fabricante y el comprador implica fijar la posición del valor AQL sobre la curva de aceptación. Ese punto indica el porcentaje de defectuosos p_0 de una población para el cual ésta es aún aceptable con base en una muestra cuya probabilidad sea (usualmente) de 90% (como $L(p, c) \geq 1 - \alpha$, es en este caso igual a 0.1, o sea 10%). Con referencia a la curva de aceptación tipo A, esto significa que, por ejemplo, en una muestra de tamaño n, c_2 partes defectuosas serán aceptables como máximo. Para recibir menos partes rechazadas, el fabricante mantiene su calidad (% de defectuosos de la población) muy por debajo del valor AQL prometido por él, p_0^*, en donde sólo se permiten c_1 defectuosos, lo que referido a la curva original corresponde a una probabilidad de aceptación de aproximadamente 99%. En la práctica se exige con frecuencia un valor AQL con p_0 = 0.65%.



n: Tamaño de la muestra
c: Número máximo de defectuosos aceptable

Definiciones generales

e′65 Confiabilidad $$R(t) = \frac{n(t)}{n_0} = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\cdot d\tau}$$

e′66 Probabilidad de fallas $$F(t) = 1 - R(t)$$

e′67 Densidad de fallas $$f(t) = -\frac{dR}{dt} = \lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\cdot d\tau}$$

e′68 Tasa de fallas o función de riesgo $$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)}\cdot\frac{dR}{dt}$$

MTTF (*mean time to failure*, o tiempo medio a la falla) es el tiempo promedio que transcurre hasta que ocurre una falla

e′69 $$\text{MTTF} = \int_0^\infty f(t)\cdot t\cdot dt = \int_0^\infty R(t)\cdot dt$$

En sistemas capaces de reparación se emplea en vez del MTTF, el MTBF, (*mean time between failures*), que es el promedio entre dos fallas, o sea MTBF = m. El MTTF y el MTBF tienen iguales valores numéricos.

e′70 $$\text{MTTF} = \text{MTBF} = m = \int_0^\infty R(t)\cdot dt$$

Teorema del producto de confiabilidades.

Si $R_1, R_2, \ldots, R_n$ son las confiabilidades de los elementos 1, ..., n, la confiabilidad del sistema total está dada por

e′71 $$R_S = R_1\, R_2 \cdot \ldots \cdot R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

e′72 $$= e^{-\int_0^t [\lambda_1(\tau) + \lambda_2(\tau) \ldots \lambda_n(\tau)]\cdot d\tau}$$

Observación:

Como modelos para la función de confiabilidad $R(t)$ pueden considerarse las funciones de distribución $F(x)$ dadas en E′4 y E′5 (cálculo según e′66). La distribución exponencial, de sencillo manejo matemático, cumple en general de manera satisfactoria los requisitos (λ = const.).

$n(t)$: condición en el tiempo t considerado
n_0 : condición inicial



Distribución exponencial como función de confiabilidad

e′73 Confiabilidad $R(t) = e^{-\lambda t}$

e′74 Probabilidad de fallas $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

e′75 Densidad de fallas $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$

e′76 Tasa de fallas $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)} = \lambda = \text{const.}$

(Dimensión: 1/tiempo)

e′77 MTBF (tiempo med. entre fallas) $m = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot dt = \dfrac{1}{\lambda}$

Producto de confiabilidades

e′78 $R_S = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n t}$

e′79 $= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}$

e′80 Tasa de fallas total $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \dfrac{1}{\text{MTBF}}$

Para valores pequeños, la tasa de fallas puede calcularse con la siguiente expresión aproximativa:

e′81 $$\lambda = \frac{\text{Fallas}}{\text{(Condición inicial) (Horas de servicio)}}$$

Los valores para λ se refieren en general a horas de servicio:

e′82 Unidad: 1 fit = 1 falla/10^9 horas

Ejemplos típicos para tasas de falla λ en fit. (IC = Circuito integrado)

IC digital bipolar (SSI)	15	Resistor de hojas metálicas	1
IC analógico bipolar (Op Amp)	100	Resistor de alambre en bobina	10
Transistor (Si) universal	20	Transformador pequeño	5
Transistor (Si) de potencia	200	Inductor de alta frecuencia	1
Diodo (Si)	5	Cuarzo	10
Tantalio con electrólito líquido	20	Diodo emisor de luz (Falla: dism. de la luminosidad a 50%)	500
Tantalio con electrólito sólido	5	Unión soldada (manual)	0.5
Aluminio, electrolítico	20	Unión enrollada	0.0025
Capacitor de cerámica; capas múltiples	10	Unión con abrazadera	0.26
Capacitor de papel	2	Contacto de clavija	0.3
Capacitor de mica	1	Receptáculo de contacto	04
Resistor de capas de carbón 100	5	Conmutador giratorio	5...30
Resistor de capas de carbón 100	0.5		

Observación: Pueden encontrarse numerosos datos sobre confiabilidades en las normas: DIN 29500, parte 1; DIN 40040, y DIN 41611.

Matemáticas financieras F′1

Conceptos principales

1. Tasas de interés

Tasa de interés: Monto que se paga en un intervalo de tiempo unitario por unidad de capital invertido.

Tasa efectiva de interés: Tasa actual de incremento por unidad invertida durante el periodo contratado.

Tasa nominal de interés: Tasa del interés total que se paga en un año sobre una unidad invertida al principio del año, considerando que cualquier interés percibido durante el año no se reinvierte.

Fuerza de interés: Tasa de crecimiento continuo según una cierta operación de interés.

Notación

i: Tasa efectiva de interés anual.

$i^{(m)}$: Tasa nominal de interés por año, pagadera m veces al año.

δ: Fuerza de interés por año.

Relaciones entre i, $i^{(m)}$ y δ:

f′1 $$e^{\delta} = (1 + i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

2. Acumulación a interés compuesto

Interés compuesto: Si el tiempo total de inversión se divide en varios periodos y al final de cada uno el interés generado se incrementa al capital para ser invertido a la misma tasa, se tiene una inversión a interés compuesto.

Notación

n: número de periodos de inversión.

P: valor presente o principal de un capital invertido al inicio de los n periodos de inversión.

S: Valor futuro o monto del capital después de n periodos de inversión.

Relación entre S, P y n.

f′2 $S = P(1 + i)^{n}$ para tasa efectiva de interés i

f′3 $S = P\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$ para tasa nominal de interés pagadera m veces al año $i^{(m)}$

f′4 $S = Pe^{n}$ para fuerza de interés δ

f′5 $p = Sv^{n}$ si $v = (1 + i)^{-1}$

3. Tasas de descuento

Tasa de descuento: Cuando se hacen los pagos de interés por anticipado, corresponde a la cantidad pagada por anticipado, respecto a la cantidad que se debe entregar al final del periodo contratado.

Tasa efectiva de descuento: Tasa actual de decrecimiento por unidad adeudada durante el periodo contratado.

Tasa nominal de descuento: Descuento total efectuado en un año sobre una cantidad comprometida para pago al final del periodo, considerando que el descuento se aplica en m exhibiciones.

Fuerza de descuento: Tasa de decrecimiento continuo bajo una operación de descuento.

Notación

d: Tasa efectiva de descuento anual.

$d^{(m)}$: Tasa nominal de descuento por año, efectuado en m exhibiciones iguales.

δ: Fuerza de descuento

Relaciones entre

d, $d^{(m)}$ y δ:

$$e^{-\delta} = (1 - d) = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

4. Relación entre interés y descuento

Interés y descuento son dos puntos de vista diferentes respecto a un mismo problema. A cada tasa de interés corresponde una tasa de descuento, y viceversa. Un pago de i al final de un año corresponde a un pago d al principio del mismo, esto es:

f′6 $$d(1 + i) = i, \text{ o bien } i(1 - d) = d$$

de donde,

f′7 $$1 - d = \frac{1}{1 + i}$$

Relaciones entre tasas de interés y de descuento:

		Monto de una unidad al fin de n años	Valor presente de una unidad antes de n años
f′8	Fuerza de interés o descuento	$e^{\delta n}$	$e^{\delta n}$
f′9	Tasa efectiva de interés	$(1 + i)^n$	V^n *)
f′10	Tasa nominal de interés	$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$	$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$
f′11	Tasa efectiva de descuento	$(1 - d)^{-n}$	$(1 - d)^n$
f′12	Tasa nominal de descuento	$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$	$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}$

f′13 *) $v = (1 + i)^{-1}$

Ecuación de valor: Consiste en dos series de obligaciones vinculadas por un signo de igualdad y valuadas en una misma fecha, llamada "fecha de valuación".

Ejemplo: Una persona adeuda $30 000 000, pagaderos dentro de 5 años y $25 000 000 pagaderos en 8 años. Desea cambiar estas deudas haciendo dos pagos iguales al cabo de 1 y 2 años, a partir de ahora. De cuánto serán los pagos requeridos si el interés es del 9% anual convertible semestralmente?

Solución: Sea x la cantidad a pagar al final del primero y segundo año; $i = 0.09$.
Se puede tomar como periodo fundamental el semestre y trabajar entonces con una tasa efectiva semestral $i = 0.045$. La ecuación de valor obtenida tomando como fecha de valuación el fin del segundo año es:

$$30\,000\,000\,V^6 + 25\,000\,000\,V^{12} = x + x(1.045)^2$$
$$30\,000\,000\,(0.767896) + 25\,000\,000\,(0.589664) = x + (1.092025)\,x$$

de donde

$$x = \$18\,058\,331.04$$

5. Anualidades

Anualidad: Serie de pagos periódicos, de sumas generalmente iguales, que se efectúan durante la existencia de una situación dada.

Anualidad cierta: Serie de pagos periódicos que deben efectuarse con certeza e independientemente de cualquier evento o suceso fortuito durante un cierto tiempo.

Anualidad contingente: Serie de pagos periódicos que se efectúan sujetos a algún evento.

Anualidad ordinaria: Serie de pagos unitarios efectuados un periodo después de su contratación y pagaderos durante n años.

Notación

$a_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad ordinaria pagadera durante n periodos.

A: Valor presente de una anualidad con serie de pagos iguales a R.

$S_{\overline{n}|}$: Monto de una anualidad ordinaria pagadero durante n periodos.

S: Monto de una anualidad con serie de pagos iguales a R.

Relaciones entre $a_{\overline{n}|}$, A, $S_{\overline{n}|}$ y S.

f′14 $$a_n = \frac{1 - v^n}{i}$$

f′15 $$A = R\, a_{\overline{n}|}$$

f′16 $$S_{\overline{n}|} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

f′17 $$S = R\, S_{\overline{n}|}$$

f′18 $$S_{\overline{n}|} = (1 + i)^n\, a_{\overline{n}|}$$

f′19 $$a_{\overline{n}|} = V^n\, S_{\overline{n}|}$$

Ejemplo: Una persona desea disponer de un capital de $1 000 000 000 dentro de 10 años, formado mediante depósitos mensuales en un banco que le ofrece el 9% de interés anual convertible mensualmente ¿De cuánto debe ser el aporte o renta mensual para lograr su objetivo?

(Continúa en F′5)

(Continuación de F′4)

Solución: El depósito mensual debe ser $\frac{R_a}{P}$, con $p = 12$, de donde aplicando la fórmula del monto se tiene:

$$S = \frac{Ra}{p} S_{\overline{mn}|i'} \; ; \; i' = \frac{0.09}{12}$$

$$R_a = \frac{SP}{S_{\overline{mn}|i'}}$$

$$R_a = \frac{12\,000\,000\,000}{S_{\overline{120}|0.0075}}$$

$$R_a = \frac{12\,000\,000\,000}{193.514281} = \$62\,010\,900$$

y la renta mensual: $\frac{R_a}{12} = \$5\,166\,741.66$

6. Amortización:

Amortización: Método para extinguir una deuda mediante pagos periódicos, generalmente iguales, en los que se incluyen tanto intereses como capital.

Tabla de amortización: Registro del destino a intereses y capital del pago periódico de una amortización.

Capital insoluto: Capital que se adeuda en cada periodo.

TABLA DE AMORTIZACION PARA UNA ANUALIDAD ORDINARIA PAGADERA DURANTE n PERIODOS

		Distribución del pago	
Número del pago	Capital insoluto al principio del periodo	Intereses contenidos en el pago	Capital contenido en el pago
1	$a_{\overline{n}|}$	$1 - V^n$	V^n
2	$a_{\overline{n-1}|}$	$1 - V^{n-1}$	V^{n-1}
3	$a_{\overline{n-2}|}$	$1 - V^{n-2}$	V^{n-2}
. . .	. . .	. . .	. . .
t	$a_{\overline{n-(t-1)}|}$	$1 - V^{n-(t-1)}$	$V^{n-(t-1)}$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$a_{\overline{1}|} = V$	$1 - V$	V

Matemáticas Financieras F′6

Casos especiales

7. Casos especiales de anualidades

Anualidad anticipada: Anualidad en la cual el primer pago se efectúa al principio del periodo.

Anualidad diferida: Anualidad ordinaria en la que se establece que el primer pago se efectuará después de un cierto número de periodos.

Perpetuidad: Anualidad en la que se estipula efectuar pagos en forma indefinida.

Anualidad creciente: Anualidad en la que el monto de los pagos crece periodo a periodo.

Anualidad decreciente: Anualidad en la que el monto de los pagos decrece periodo a periodo.

Notación

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad unitaria anticipada.

$\ddot{S}_{\overline{n}|}$: Monto de una anualidad unitaria anticipada pagadera durante n periodos.

$m/a_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad unitaria diferida m periodos.

a_{∞} : Valor presente de una perpetuidad unitaria.

$(Ia)_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad unitaria con primer pago unitario y que crece aritméticamente 1 unidad por periodo.

$(Da)_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad unitaria con primer pago n y que decrece aritméticamente 1 unidad por periodo.

$a^{(p)}_{\overline{n}|}$: Valor presente de una anualidad unitaria con p pagos iguales por periodo.

$S^{(p)}_{\overline{n}|}$: Monto de una anualidad unitaria con p pagos iguales por periodo.

Relaciones entre diferentes tipos de anualidades.

f′20 $$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1 + i)\, a_{\overline{n}|}$$

f′21 $$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$$

f′22 $$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1 + i)\, S_{\overline{n}|}$$

f′23 $$S_{\overline{n}|} = v\, \ddot{S}_{\overline{n}|}$$

f′24 $$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1$$

f′25 $$m/a_{\overline{n}|} = V^{m}\, a_{\overline{n}|}$$

f′26 $$m/a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

f′27 $$a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

(Continúa en F′7)

(Continuación de F′6)

f′28 $(Ia)_{\overline{n}|} = \dfrac{a_{n-1} + 1 - nV^n}{i}$

f′29 $(Da)_{\overline{n}|} = \dfrac{n - a_D}{i}$

f′30 $a^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{i}{i^{(p)}} a_n$ para tasa efectiva anual i

f′31 $S^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{i}{i^{(p)}} S_n$ para tasa efectiva anual i En lo siguiente: $i' = \dfrac{i^{(m)}}{m}$

f′32 $a^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{p} a_{\overline{nm}|i'}$

f′33 $S^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{p} S_{\overline{nm}|i'}$

(f′32 y f′33) para tasa nominal de interés $i^{(m)}$ con $m = p$.

f′34 $a^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{m} \dfrac{i'}{i'(k)} a_{\overline{mn}|i'}$

f′35 $S^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{m} \dfrac{i'}{i'(k)} a_{\overline{mn}|i'}$

(f′34 y f′35) para tasa nominal de interés $i^{(m)}$ con $m < p$, y $p = mk$ para k entero.

f′36 $a^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{pS_{\overline{k}|i'}} a_{\overline{mn}|i'}$

f′37 $S^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{pS_{\overline{k}|i'}} S_{\overline{mn}|i'}$

(f′36 y f′37) para tasa nominal de interés $i^{(m)}$ con $m > p$ y $m = kp$ para k entero.

f′38 $$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}$$

f′39 $$S = \frac{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}$$

(f′38 y f′39) para tasa nominal de interés i, en el cual no coinciden la frecuencia de los pagos con la convertibilidad de la tasa de interés.

Ejemplo: Encontrar el valor presente de 4 pagos anuales iguales de \$5 000 000; el primero de ellos se efectúa inmediatamente y la tasa de interés efectivo anual es de 8%.

Solución: Se desea determinar el valor presente de una cantidad anticipada a 4 años; $A = 5\,000\,000\ \ddot{a}_{\overline{n}|}$. Esto es:

$$A = 5\,000\,000\ \ddot{a}_{\overline{n}|} = 5\,000\,000\ [(1 + i)\ a_{\overline{n}|}]$$
$$= 5\,000\,000\ [(1.08)\ a_{\overline{n}|0.08}] = 5\,000\,000\ (1.08)\ (3.31213)$$
$$= \$17\,885\,502$$

Teoría de ecuaciones G′1

Ecuación algebraica de cualquier grado

DEFINICION DE UNA ECUACION ALGEBRAICA

Una ecuación algebraica tiene la forma:

g′1 $$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Todos los términos cuyos coeficientes a_μ son iguales a 0 cuando $\mu < n$ se pueden omitir.

La solución de una ecuación algebraica implica la determinación de los ceros (las raíces) de la ecuación, para los cuales $f_n(x) = 0$.

Características

1. La ecuación algebraica $f_n(x) = 0$ de grado n tiene exactamente n ceros (raíces).
2. Si todos los coeficientes a_ν son reales, sólo existen ceros reales o complejos conjugados como soluciones.
3. Si todos los coeficientes a_ν son ≥ 0, no hay soluciones cuya parte real sea > 0.
4. Si n es impar, cuando menos un cero es real, suponiendo que todos los coeficientes a_ν son reales.
5. Las relaciones entre los ceros x_μ y los coeficientes son:

g′2 $\sum x_i = -a_{n-1}/a_n$ para $i = 1, 2, \dots n$

g′3 $\sum x_i \cdot x_j = a_{n-2}/a_{n-1}$ para $i, j = 1, 2, \dots n$ donde $i = j$

g′4 $\sum x_i \cdot x_j \cdot x_n = -a_{n-3}/a_{n-2}$ para $i, j, k = 1, 2, \dots n$ donde $i = j = k$

$\vdots$

g′5 $$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0/a_1.$$

6. La cantidad de raíces reales positivas de la ecuación en cuestión es igual a la cantidad de cambios de signo de la serie de coeficientes

g′6 $$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0.$$

o este valor menos un número par (teorema de Descartes).

g′7 Ejemplo: $f_3(x) = 2x^3 - 15x^2 + 16x + 12 = 0$ tiene los signos
$+ \quad - \quad + \quad +$
y debido a los 2 cambios de signo tiene 2 o 0 raíces reales positivas.

(Continúa en G′2)

Teoría de ecuaciones G′2

Ecuación algebraica de cualquier grado

(continuación de G′1)

7. La cantidad de raíces reales <u>negativas</u> de la ecuación en cuestión se determina mediante la sustitución $x = -z$:

g′8 En este caso la cantidad de cambios de signo en la serie de coeficientes $a_n^*, a_{n-1}^*, a_{n-2}^*, \ldots, a_2^*, a_1^*, a_0^*$ es igual a la cantidad de raíces reales negativas, o a este valor menos un número <u>par</u>. Aplicado al ejemplo en G′1, punto 6:

g′9 $$f_3(z) = -2z^3 - 15z^2 - 16z + 12 = 0$$

tiene los signos − − − + y por consiguiente la ecuación g′ 7 únicamente tiene <u>una</u> raíz real negativa, debido a que tiene <u>un</u> solo cambio de signo.

Solución general

Si x_1 es una raíz de una ecuación algebraica de grado n, $f_n(x) = 0$, el grado de $f_n(x)$ se puede reducir en una unidad a $f_{n-1}(x) = 0$ cuando $f_n(x)$ se divide entre $(x - x_1)$. Si se conoce también otra raíz x_2, la ecuación se puede reducir un grado más al dividirla entre $(x - x_2)$, y así sucesivamente.

g′10 $$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

g′11 $$f_n/(x-x_1) = f_{n-1}(x) = a_n' x^{n-1} + a_{n-1}' x^{n-2} + \ldots + a_2' x + a_1'$$

g′12 $$f_{n-1}/(x-x_2) = f_{n-2}(x) = a_n'' x^{n-2} + a_{n-2}'' x^{n-3} + \ldots + a_2'' x + a_1''$$

$$f_{n-2}/(x-x_3) = \ldots \text{etc.}$$

$$\vdots$$

g′13 $$f_1/(x-x_n) = f_0(x) = a_n^{(n)}.$$

Hay un caso especial en el que las raíces son complejos conjugados; después de la división, el grado de la ecuación se reduce en 2 unidades. La división de la ecuación algebraica $f_n(x)$ entre $(x - x_\mu)$ se puede llevar a cabo fácilmente aplicando el método de Horner que se describe en G′3.

METODO DE HORNER

El método de Horner es un algoritmo que se puede aplicar al polinomio P de n-ésimo grado

g′14 $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

para resolver los siguientes problemas:

* Cálculo del valor de $P_n(x)$ para $x = x_0$.
* Cálculo de los valores de las derivadas $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, etc. hasta $P_n^{(n)}(x)$ para $x = x_0$.
* Reducción del grado de $P_n(x)$ si hay raíces conocidas.
* Determinación de los ceros (las raíces).

(Continúa en G′3)

Método de Horner (ver el esquema abajo):

Se igualan los coeficientes a_ν a $a_\nu^{(0)}$ y se escriben los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ –comenzando con el que se relaciona con el exponente máximo– en el primer renglón. Las posiciones donde no hay exponentes tienen el elemento 0.

	Línea	Esquema
g'15	1	$a_n^{(0)} \quad a_{n-1}^{(0)} \quad a_{n-2}^{(0)} \quad a_{n-3}^{(0)} \ldots \quad a_2^{(0)} \quad a_1^{(0)} \quad a_0^{(0)}$
g'16	2	$x_0 \quad x_0 a_n^{(1)} \quad x_0 a_{n-1}^{(1)} \quad x_0 a_{n-2}^{(1)} \ldots \quad x_0 a_3^{(1)} \quad x_0 a_2^{(1)} \quad x_0 a_1^{(1)}$
g'17	3	$a_n^{(1)} \quad a_{n-1}^{(1)} \quad a_{n-2}^{(1)} \quad a_{n-3}^{(1)} \ldots \quad a_2^{(1)} \quad a_1^{(1)} \quad \boxed{a_0^{(1)} = b_0 = P_n(x_0)}$
g'18	4	$x_0 \quad x_0 a_n^{(2)} \quad x_0 a_{n-1}^{(2)} \quad x_0 a_{n-2}^{(2)} \ldots \quad x_0 a_3^{(2)} \quad x_0 a_2^{(2)}$
g'19	5	$a_n^{(2)} \quad a_{n-1}^{(2)} \quad a_{n-2}^{(2)} \quad a_{n-3}^{(2)} \ldots \quad a_2^{(2)} \quad \boxed{a_1^{(2)} = b_1 = 1/1! \cdot P_n'(x_0)}$
g'20	6	$x_0 \quad x_0 a_{n-1}^{(3)} \quad x_0 a_{n-2}^{(3)} \quad x_0 a_{n-2}^{(3)} \ldots \quad x_0 a_3^{(3)}$
g'21		$a_n^{(3)} \quad a_{n-1}^{(3)} \quad a_{n-2}^{(3)} \quad a_{n-3}^{(3)} \ldots \quad \boxed{a_2^{(3)} = b_2 = 1/2! \cdot P_n''(x_0)}$
		$\vdots$
g'22		$x_0 \quad x_0 a_n^{(n)}$
g'23		$a_n^{(n)} \quad \boxed{a_{n-1}^{(n)} = b_{n-1} = 1/(n-1)! \cdot P_n^{(n-1)}(x_0)}$
g'24		x_0
g'25		$\boxed{a_n^{(n)} = a_n = b_n = 1/n! \cdot P_n^{(n)}(x_0)}$

Ejemplo 1 del método de Horner:

Cálculo de los valores de $P_n(x)$, $P_n'(x)$, $P_n''(x)$ y $P_n'''(x)$ para $x = x_0$; $x_0 = 4$:

g'26 $$P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

g'27		$a_3^{(0)}$	$a_2^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_0^{(0)}$	
g'28		1	−6	11	−6	
g'29	$x_0 = 4$		4	−8	12	
g'30		1	−2	3	6	$= P_n(4)$
g'31	4		4	8		
g'32		1	2	11		$= P_n'(4)$
g'33	4		4			
g'34		1	6			$= P_n''(4) \cdot 1/2!$; $P_n''(4) = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$
g'35		1				$= P_n'''(4) \cdot 1/3!$; $P_n'''(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$

Teoría de ecuaciones G′4

Ecuación algebraica de cualquier grado

Explicación del método de Horner

Se va a calcular el valor de un polinomio y de sus derivadas en un punto fijo $x = x_0$.

Los resultados de las multiplicaciones de x_0 por los factores $a_n^{(1)}$, $a_{n-1}^{(1)}$, etc., indicadas por las líneas se escriben en el segundo renglón (por ejemplo, $x_0 \cdot a_n^{(1)} = x_0 a_n^{(1)}$).
El renglón 3 muestra los resultados de la suma de los renglones 1 y 2.

g′36 Por ejemplo $a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(0)} + x_0 \cdot a_n^{(1)}$; donde $a_n^{(1)} = a_n^{(0)}$

g′37 $a_{n-2}^{(1)} = a_{n-2}^{(0)} + x_0 \cdot a_{n-1}^{(1)}$

Particularmente

g′38 $$a_0^{(1)} = a_0^{(0)} + x_0 \cdot a_1^{(1)} = b_0 = P_n(x_0)$$

significa el valor del polinomio en el punto $x = x_0$.
Usando el mismo esquema, partiendo del renglón 3, por medio de multiplicaciones y adiciones se llega al renglón 5 con

g′39 $$a_1^{(2)} = b_1 = P_n'(x_0)$$

que es el valor de la primera derivada de $P_n(x)$ en el punto $x = x_0$.
Este procedimiento se puede repetir n veces, puesto que un polinomio de grado n tiene exactamente n derivadas.
Estos cálculos dan como resultado:

g′40 $$P_n(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-x_0) + a_2^{(3)}(x-x_0)^2 + \ldots + \ldots + a_{n-1}^{(n)}(x-x_0)^{n-1} + a_n^{(n)}(x-x_0)^n$$

g′41 $$= P_n(x_0) + 1/1! \cdot P_n'(x_0) \cdot (x-x_0) + 1/2! \cdot P_n''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + \ldots + \ldots 1/(n-1)! \cdot P_n^{(n-1)}(x_0) \cdot (x-x_0)^{n-1} + 1/n! \cdot P_n^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n$$

Ejemplo 2 del método de Horner:

Reducción del grado si hay un cero (raíz) conocido x_0, es decir, determinar $P_{n-1}(x)$ usando:

g′42 $$P_n(x)/(x-x_0) = P_{n-1}(x).$$

g′43 Datos: $P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ con la raíz $x_0 = 1$.

		$a_3^{(0)}$	$a_2^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_0^{(0)}$	
g′44	Esquema:	$a_3^{(0)}$	$a_2^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_0^{(0)}$	
g′45		1	−6	11	−6	
g′46	$x_0 = 1$		1	−5	6	
g′47		1	−5	6	0	$= P_n(1)$.

Resultado: $P_n(1) = 0$ indica que $x_0 = 1$ es una raíz de $P_n(x)$.

g′48 Entonces $P_{n-1}(x) = 1x^2 - 5x + 6$.

Las raíces de esta última ecuación ($x_1 = 2$ y $x_2 = 3$) pueden ser determinadas fácilmente utilizando d 41.

Teoría de ecuaciones G′5

Solución aproximada de cualquier ecuación

PROCEDIMIENTO GENERAL

Dado que la determinación analítica de los ceros (raíces) de las ecuaciones algebraicas e incluso de las ecuaciones trascendentes sólo es posible con restricciones, en G′6 a G′8 se presentarán los siguientes métodos para obtener soluciones aproximadas:

Método de Newton

Método de la secante

Método de la interpolación lineal, falsa posición o regula falsi

Comenzando con un valor inicial aproximado, se puede lograr cualquier grado de exactitud mediante iteración.

Ejemplo de una ecuación algebraica (polinomial):

g′49 $$x^4 - 3x^2 + 7x - 5 = 0.$$

Ejemplo de una ecuación trascendente:

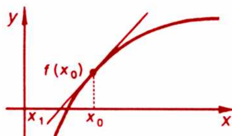
g′50 $$x \cdot \lg(x) - 1 = 0.$$

Procedimiento

- Determinación gráfica de la aproximación inicial trazando la curva a partir de una tabla de valores conocidos.
- Seleccionar uno de los tres métodos señalados anteriormente. Obsérvese que la interpolación lineal siempre es convergente. Para los demás métodos, la convergencia sólo se garantiza bajo las condiciones citadas en G′6 y G′7. La desventaja de este examen adicional será compensada generalmente por una convergencia bastante más rápida.
- Con frecuencia se puede obtener una mejor convergencia comenzando con un método y continuando con otro; en especial cuando después de varias iteraciones ya no se observa un mejoramiento en los resultados.

METODO DE APROXIMACION DE NEWTON

El valor x_0 es la primera aproximación de la raíz n_0 de la ecuación $f(x) = 0$. Se traza la tangente en $f(x_0)$; la intersección de la tangente con el eje x es un mejor valor que el punto de partida x_0. El cálculo de x_1 se hace como sigue:



g′51 $$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Se calcula el valor mejorado x_2 usando x_1 en forma semejante:

g′52 $$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) \qquad \text{etcétera.}$$

La repetición múltiple de este método conduce a los resultados de cualquier precisión que se desee.

Regla general

g′53 $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) \quad ; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Condiciones para la convergencia en este método:

- n_0 es un cero sencillo (no múltiple)
- entre x_0 y n_0 no debe haber máximos o mínimos de la función $f(x)$.

Convergencia: Localmente convergente.

Comentario: Los valores $f(x_k)$ y $f'(x_k)$ que son necesarios en el método de Newton se pueden calcular muy fácilmente mediante el método de Horner descrito en G′3.

g′54 Ejemplo: $f(x) = x \cdot \log x - 1$. El valor inicial para obtener un cero que satisfaga $f(x) = 0$ puede ser $x_0 = 3$.

g′55 1er paso: g′51 requiere el cálculo de la derivada $f'(x_0)$:

g′56 $$f'(x) = \lg(x) + \lg(e) = \lg(x) + 0.434\,294.$$

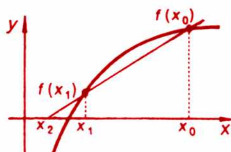
g′57 2º paso: Determinación de un valor mejorado x_1:
De acuerdo con g′51, los valores $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0.431364$ y $f'(x_0) = 0.911415$ proporcionan el valor $x_1 = 2.526710$.

g′58 3er paso: Determinación de un valor mejorado x_2:
Usando los valores $x_1 = 2.526710$, $f(x_1) = 0.017141$ y $f'(x_1) = 0.836849$, a partir de la ecuación g′52 se obtiene $x_2 = 2.506227$; error $+ 0.000036$.
Con x_2 el cero tiene un error de 0.000036.

g′59 4º paso: Si la exactitud de x_2 no es suficiente, se deben efectuar más iteraciones.

METODO DE APROXIMACION DE LA SECANTE

Se sustituye la derivada $f'(x)$ del método de Newton por el cociente diferencial: dos puntos adyacentes, $f(x_0)$ y $f(x_1)$, se unen por medio de una recta. Debe determinarse el valor x_2 en la intersección de esa recta con el eje x; x_2 es la primera aproximación al cero n_0 requerido.



g'60 $$x_2 = x_1 - f(x_1)\,\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

En el siguiente paso se une $f(x_1)$ con $f(x_2)$. La intersección de esta recta con el eje x es la siguiente aproximación.

Regla general de iteración:

g'61 $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad k = 1, 2, \ldots \quad f(x_k) \neq f(x_{k-1})$$

Comentario: Con frecuencia se puede obtener una convergencia especialmente rápida cuando se usan alternadamente los métodos de la secante y de Newton.

Convergencia: Localmente convergente.

g'62 Ejemplo: $f(x) = x \cdot \lg x - 1$; $x_0 = 4$; $x_1 = 3$.
$f(x_0) = 1.408\,240$; $f(x_1) = 0.431\,364$.

g'63 1ª aproximación: $x_2 = 3 - 0.431\,364\,(3 - 4)/(0.431\,364 - 1.408\,240)$
$= 2.558\,425$.

g'64 Error $f(x_2) = 0.043\,768$

2ª aproximación calculada con x_1, x_2, $f(x_1)$ y $f(x_2)$:

g'65 $x_3 = 2.558\,425 - 0.043\,768\,(2.558\,425 - 3)/(0.043\,768 - 0.431\,364)$
$= 2.508\,562$

g'66 Error $f(x_3) = 0.001\,982$.

En lugar de continuar con el método de la secante, se puede aplicar ahora el método de Newton:

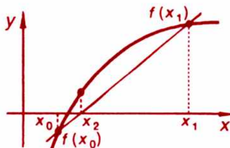
g'67 Por esta razón se debe calcular $f'(x_2)$: $f'(x) = \log x + \log(e)$

g'68 $f'(x_2) = \lg(2.558\,425) + 0.434\,294 = 0.842\,267$

g'69 $x_3^* = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 2.558\,425 - 0.043\,768/0.842\,267 = 2.506\,460$.

g'70 Error: $f(x_3^*) = 0.000230$. x_3^* produce un error menor que x_3, el cual se determinó usando sólo el método de la secante.

METODO DE APROXIMACION POR INTERPOLACION LINEAL. REGLA FALSA O REGULA FALSI



Se escogen dos valores, x_0 y x_1, de tal modo que $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tengan signos distintos. Entre esos dos puntos debe existir cuando menos un cero n_0. La intersección de la recta que pasa por $f(x_0)$ y $f(x_1)$ con el eje x es la primera aproximación x_2. Para determinar el valor mejorado x_3, se traza una recta por $f(x_2)$ y uno de los puntos que se usaron antes, $f(x_0)$ o $f(x_1)$, y se calcula la intersección de esta recta con el eje x. ¡Siempre se debe usar el último de los puntos anteriores que tenga signo distinto al de $f(x_2)$!

g′71 Se debe cumplir que $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$ o bien $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$.

Regla general:

g′72
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_j}{f(x_k) - f(x_j)} \qquad k = 1, 2, \ldots \quad 0 \leqq j \leqq k-1 \quad f(x_k) \neq f(x_j)$$

Aquí, j es el valor máximo menor que k para el que es válido $f(x2) \cdot f(x1) < 0$.

Convergencia: Siempre convergente.

g′73 Ejemplo: $f(x) = x \cdot \log x - 1$; elección de $x_0 = 1$, con $f(x_0) = -1$ y $x_1 = 3$ con $f(x_1) = +0.431364$

g′74 en este caso se cumple que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.

g′75
$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 3 - 0.431\,364\ \frac{3-1}{0.431\,364 + 1} = 2.397\,269;$$

g′76 $f(x_2) = 2.397269 \cdot \log 2.397269 - 1 = -0.089717$. Este valor representa la exactitud con la que x_2 se aproxima al cero.

g′77 Puesto que $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, la recta se traza pasando por $f(x_2)$ y $f(x_1)$. La intersección de esta recta con el eje x es:

g′78
$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 2.501\,044; \quad f(x_3) = -0.004\,281$$

g′79 Puesto que $f(x_3) \cdot f(x_2) > 0$ pero $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$, se traza la recta que pasa por $f(x_3)$ y $f(x_1)$. La intersección de esta recta con el eje x es:

g′80
$$x_4 = x_3 - f(x_3) \cdot \frac{x_3 - x_1}{f(x_3) - f(x_1)} = 2.505947$$

g′81 $f(x_4) = -0.000\,197\,5.$

Para obtener una mayor exactitud, se tiene que calcular la intersección de la recta que pasa por $f(x_4)$ y $f(x_1)$ con el eje x. Dado que $f(x_4) \cdot f(x_3) > 0$ y $f(x_4) \cdot f(x_2) > 0$, no se pueden usar los valores de $f(x_3)$ y $f(x_2)$.

ENGRANES CON DIENTES DE EVOLVENTE

Geometría de engranes cilíndricos rectos

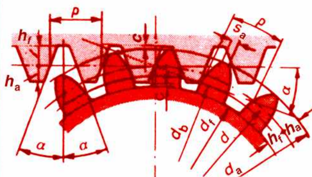
o′1 Razón de engrane $u = \frac{z_2}{z_1}$

o′2 Coeficiente de transmisión $i = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{n_a}{n_b} = -\frac{z_b}{z_a}$[1)]

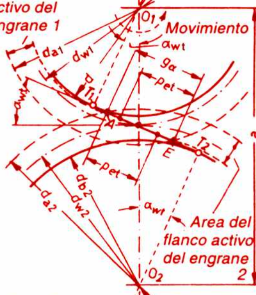
Coeficiente de transmisión de engranes múltiples

o′3 $i_{tot} = i_I \cdot i_{II} \cdot i_{III} \cdot \ldots \cdot i_n$

o′4 Función de evolvente $\operatorname{inv}\alpha = \tan\alpha - \widehat{\alpha}$



Esquema de la trayectoria transversal de contacto (Véase ISO/R 1122)



Si A y E no quedan entre T_1 y T_2, habrá interferencia y se deberán usar engranes "modificados" como los de O′3.

1) Negativo para engranes externos porque la rotación es opuesta. Positivo para engranes internos. En general se puede omitir el signo.

		Engranes normales de acuerdo con DIN 867 rectos	helicoidales
o′5	paso normal	$p = \frac{\pi \cdot d}{z} = m \cdot \pi$	$p_n = m_n \cdot \pi$
o′6, o′7	paso circular		$p_t = \frac{m_n \cdot \pi}{\cos\beta}$
o′8	módulo normal	$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{z}$	$m_n = \frac{p_n}{\pi} = \frac{d}{z} \cdot \cos\beta$
o′9, o′10	módulo circular		$m_t = \frac{m_n}{\cos\beta} = \frac{d}{z}$
o′11	adendo	$h_a = h_{aP} = m$	
o′12	dedendo	$h_f = h_{fP} = m + c$	
o′13	claro en el fondo	$c = (0.1 \ldots 0.4)\, m \approx 0.2 \cdot m$	

(Continúa en O′2)

Elementos de máquinas O′2

Engranes con dientes de evolvente

		Engranes normales: rectos	Engranes normales: helicoidales
o′14/15	diámetro de paso	$d = m \cdot z$	$d = \frac{m_n \cdot z}{\cos\beta} = m_t \cdot z$
o′16	diámetro de adendo	$d_a = d + 2 \cdot h_a$	
o′17	diámetro de dedendo	$d_f = d - 2 \cdot h_f$	
o′18	ángulo de presión	$\alpha = \alpha_n = \alpha_t = \alpha_p$	$\alpha_n = \alpha_p$
o′19			$\tan\alpha_t = \frac{\tan\alpha_n}{\cos\beta}$
o′20/21	diámetro de la base	$d_b = d \cdot \cos\alpha$	$d_b = d \cdot \cos\alpha_t$
o′22	Núm. equivalente de dientes		$z_n = z \frac{1}{\cos^2\beta_b \cdot \cos\beta}$ ver tabla en DIN 3960
o′23			$\approx \frac{z}{\cos^3\beta}$
	Núm. mín. de dientes		
o′24	Para evitar socavamiento producido por herramienta de talla: teoría	$z_g = \frac{2}{\text{sen}^2\alpha} \approx 17$ para $\alpha_P = 20°$	$z_{gs}' \approx 17 \cdot \cos^3\beta$
o′25/26	práctica	$z_g' \approx 14$	$z_{gs}' \approx 14 \cdot \cos^3\beta$
o′27	extensión		$g_\beta = b \cdot \tan \lvert\beta\rvert$

		Tren de engranes normal: rectos	Tren de engranes normal: helicoidales
o′28/29	distancia entre centros	$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = m\frac{z_1 + z_2}{2}$	$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cdot \cos\beta}$
o′30	longitud del arco de contacto (longitud total)	$g_\alpha = \frac{1}{2}\left[\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - (d_{b1} + d_{b2}) \cdot \tan\alpha_t\right]$	
o′31/32	razón de contacto transversal	$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p \cdot \cos\alpha}$	$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_t \cdot \cos\alpha_t}$
o′33	razón de traslape		$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \text{sen}\lvert\beta\rvert}{m_n \cdot \pi}$
o′34	razón de contacto		$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$

(Continúa en O′3)

Véanse los subíndices en O′6 y los símbolos en O′9

		Engranes modificados rectos	Engranes modificados helicoidales
	p, p_n, p_t, z, z_n / m, m_n, m_t, d, d_b	ver engranes normales	
o'35/36	desplazamiento del perfil	$x \cdot m$	$x \cdot m_n$
o'37/38	factor de desplazamiento del perfil: para evitar interferencia	$x_{mín} = -\dfrac{z \cdot \text{sen}^2\alpha}{2} + \dfrac{h_{a0} \cdot \varrho_{a0}(1 - \text{sen}\,\alpha)}{m}$	$x_{mín} = -\dfrac{z \cdot \text{sen}^2\alpha_t}{2 \cdot \cos\beta} + \dfrac{h_{a0} \cdot \varrho_{a0}(1 - \text{sen}\,\alpha_n)}{m_n}$
		puede ser hasta 0.17 mm	
o'39/40	factor de desplazamiento del perfil: para evitar interferencia[1]	$x \approx \dfrac{14 - z}{17}$	$x \approx \dfrac{14 - (z/\cos^3\beta)}{17}$
o'41	factor de desplazamiento del perfil: para obtener determinada distancia entre centros (total)	$x_1 + x_2 = \dfrac{(z_1 + z_2) \cdot (\text{ev}\,\alpha_{wt} - \text{ev}\,\alpha_t)}{2 \cdot \tan\alpha_n}$	
o'42	α_{wt} calculado de	$\cos\alpha_{wt} = \dfrac{(z_1 + z_2) \cdot m_t}{2 \cdot a} \cdot \cos\alpha_t$	
o'43	o bien	$\text{ev}\,\alpha_{wt} = \text{ev}\,\alpha_t + 2 \cdot \dfrac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan\alpha_n$	
o'44	distancia entre centros	$a = a_d \cdot \dfrac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}}$	
o'45	coeficiente de modificación de adendo	$k^* \cdot m_n = a - a_d - m_n \cdot (x_1 + x_2)$ [2]	
o'46	adendo	$h_a = h_{aP} + x \cdot m_n + k^* \cdot m_n$	
o'47	dedendo	$h_f = h_{fP} - x \cdot m_n$	
o'48	diámetro externo	$d_a = d + 2 \cdot h_a$	
o'49	diámetro de dedendo	$d_f = d - 2 \cdot h_f$	
o'50	longitud del arco de contacto	$g_\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - (d_{b1} + d_{b2}) \cdot \tan\alpha_{wt}\right]$	
o'51/52	razón de contacto transversal	$\varepsilon_\alpha = g_\alpha / (p \cdot \cos\alpha)$	$\varepsilon_\alpha = g_\alpha / (p_t \cdot \cos\alpha_t)$
o'53	razón de traslape		$\varepsilon_\beta = b \cdot \text{sen}\,\lvert\beta\rvert / (m_n \cdot \pi)$
o'54	razón de contacto		$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$

[1] Si se desconocen datos de la herramienta, supóngase $\alpha_P = 20°$.

[2] Observe el signo. Con engranes externos, $k \times m_n < 0$! Cuando $k < 0.1$ se puede evitar la modificación del adendo.

Véanse los subíndices en O'6 y los símbolos en O'9

DISEÑO DE ENGRANES CILINDRICOS RECTOS

Las dimensiones dependen de

la capacidad de carga del dedendo del diente
la capacidad de carga del flanco del diente

que se deben cumplir en forma independiente.

El diseño del engrane se comprueba de acuerdo con DIN 3990. Mediante conversión y agrupación de varios factores, es posible obtener algunas fórmulas aproximadas a partir de la norma DIN 3990.

Capacidad de carga del diente (cálculo aproximado)

Factor de seguridad S_F para el caso de falla del pie del diente por fatiga:

o'55
$$S_F = \frac{\sigma_{F\,lím} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta\,rel\,T} \cdot Y_{R\,rel\,T} \cdot Y_X}{\frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot \underbrace{Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}}_{= Y_{Fs}} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta} \geqq S_{F\,mín}$$

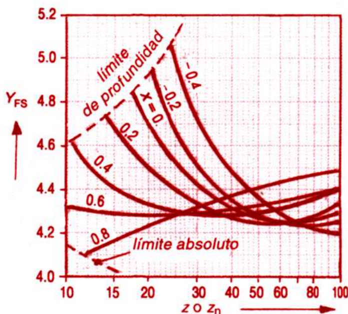
Se suponen las siguientes simplificaciones:

$$(K_{F\alpha} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta) \approx 1; \quad Y_{ST} = 2; \quad Y_{NT} \approx 1;$$
$$(Y_{\delta\,rel\,T} \cdot Y_{R\,rel\,T} \cdot Y_X) \approx 1$$

o'56
$$m_n \geqq \frac{F_t}{b} \cdot \frac{(K_A \cdot K_v) \cdot K_{F\beta} \cdot Y_{Fs} \cdot S_{F\,mín}}{2 \cdot \sigma_{F\,lím}}$$

Y_{FS}: factor de forma del diente para engrane externo (ver diagrama)

o'57 $K_A \cdot K_V = 1 \ldots 3$, normalmente (considerando choque externo e irregularidades que sobrepasen al par nominal, fuerzas dinámicas internas adicionales causadas por errores de dientes y la velocidad circunferencial).



o'58 $S_{F\,mín} = 1.7$ (valor guía)

o'59 $\sigma_{F\,lím}$: ver tabla de valores guía en O'5

(Continúa en O'5)

Véanse los subíndices en O'6 y los símbolos en O'9

Capacidad de carga del flanco del diente (cálculo aproximado)

Factor de seguridad S_H en el caso de corrosión:

o'60 $$S_H = \frac{\sigma_{H\,lím} \cdot Z_{NT} \cdot (Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R) \cdot Z_W \cdot Z_X}{\sqrt{\frac{u+1}{u} \cdot \frac{F_t}{b \cdot d_1}} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}}} \geqq S_{H\,mín}$$

En los metales, el factor de elasticidad Z_E se simplifica a:

o'61 $$Z_E = \sqrt{0.175 \cdot E} \quad \text{donde} \quad E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$$

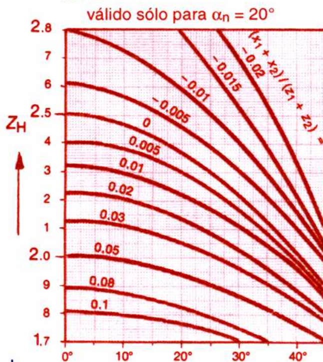
Por consiguiente, se obtiene la siguiente fórmula aproximada:

o'62 $$d_1 \geqq \sqrt{\frac{2 \cdot T_1}{b} \cdot \frac{u+1}{u} 0.175 \cdot E \cdot \cos\beta \cdot \frac{\overbrace{Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot \sqrt{K_{H\alpha}}}^{\approx 1} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v} \cdot \sqrt{K_{H\beta}}}{\underbrace{(Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R)}_{\text{ver o'66}} \cdot \underbrace{(Z_{NT} \cdot Z_W \cdot Z_X)}_{\approx 1}} \cdot \frac{S_{H\,mín}}{\sigma_{H\,lím}}}$$

Valores aproximados de resistencia (Diagramas en DIN 3990, parte 5)

Material	Especificación: Norma	Especificación: Grado	$\sigma_{F\,lim}$ N/mm²	$\sigma_{H\,lim}$ N/mm²
CI	ASTM	A48-50 B	80	360
CS	ASTM	A536-20-90-02	230	560
CS	ASTM	A572 Gr.65	200	400
AS	SAE	1064	220	620
AS	SAE	4140	290	670
ASCH	SAE	3240	500	1630

CI: hierro colado
CS: acero al carbón
AS: acero aleado
ASCH: acero aleado cementado



(Continúa en O'6)

Z_H para $\alpha_n = 20°$ | *ángulo entre ejes para engranes helicoidales (cilindro de paso)* } β →

$K_A \cdot K_V$: ver capacidad de carga del dedendo del diente (o'57)

$S_{H\,mín} \approx$ 1.2 (valor guía)

o'63 $\sigma_{H\,lím}$: ver tablas de valores aproximados

o'64 Z_H: factor de zona (ver diagrama)

o'65 $(Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R) \approx$ 0.85 para dientes tallados o desbastados

o'66 $\approx$ 0.92 para dientes rectificados o tallados con altura promedio de cresta a valle $R_{z\,100} \leq 4\ \mu m$.

Véanse los subíndices en O'6 y los símbolos en O'9

Elementos de máquinas O'6

Engranes con dientes de evolvente

En o'56, o'60 y o'62 se deben conocer *b* o *b* y *d*. Las razones siguientes son estimativas y se deben usar en cálculos preliminares:

Dimensiones del piñón

	Ya sea:	$\frac{d_1}{d_{eje1}}$	O bien:
o'67	piñón con eje integral	1.2 . . . 1.5	a partir de la relación de engrane *i* y una distancia *a* especificada entre centros (ver o'28-29-44)
o'68	piñón de rotación libre sobre el eje	2	

Razones de ancho de diente

	Calidad de dientes y cojinetes	$\frac{b}{m}$	$\frac{b}{d_1}$
o'69	dientes bien colados o cortados con soplete	6 . . . 10	
o'70	dientes maquinados; cojinetes a cada lado, en construcción de acero, o piñón en voladizo	(6) . . . 10 . . . 15	
o'71	dientes bien maquinados; cojinetes soportados a cada lado en la caja del engrane	15 . . . 25	
o'72	dientes con talla de precisión; buenos cojinetes a ambos lados y lubricación en la caja del engrane: $n_1 \leq 50\ s^{-1}$	20 . . . 40	
o'73	engrane en voladizo		≤ 0.7
o'74	totalmente soportado		≤ 1.5

Subíndices para O'1 a O'8

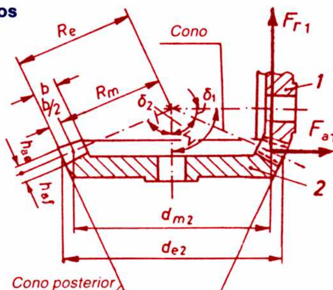
- a : engrane conductor
- b : engrane conducido
- m : mitad de diente en engranes cónicos
- n : normal
- o : herramienta
- t : tangencial
- v : en cono posterior (o engrane cilíndrico virtual)
- 1 : engrane menor o piñón
- 2 : engrane mayor

Véanse los símbolos en O'9

ENGRANES CONICOS

Geometría de engranes cónicos

Se aplican las ecuaciones o′1 a o′3, y también:



Sólo se muestran las fuerzas axiales y radiales que actúan sobre el piñón 1

ángulo δ del cono:

o′75 $$\tan\delta_1 = \frac{\text{sen}\,\Sigma}{\cos\Sigma + u};$$

o′76 $$\left(\Sigma = 90° \Rightarrow \tan\delta_1 = \frac{1}{u}\right)$$

o′77 $$\tan\delta_2 = \frac{\text{sen}\,\Sigma}{\cos\Sigma + 1/u};$$

o′78 $$(\Sigma = 90° \Rightarrow \tan\delta_2 = u)$$

o′79 *ángulo entre ejes* $$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

o′80 *distancia del cono* $$R_e = \frac{d_e}{2 \cdot \text{sen}\,\delta}$$

Del desarrollo del cono posterior para examinar las condiciones de engrane y para determinar la capacidad de carga se obtiene el engrane cilíndrico virtual (subíndice "v" = virtual) con los valores:

o′81 engrane cónico recto | $z_v = \dfrac{z}{\cos\delta}$ | $u_v = \dfrac{z_{v2}}{z_{v1}}$ | $d_v = \dfrac{d_m}{\cos\delta}$

Las fórmulas o′7 y o′10 a o′15 también se pueden aplicar a la superficie del cono posterior (subíndice "e").

Diseño de engranes cónicos

El diseño se basa en el PUNTO MEDIO DEL ANCHO b (subíndice "m") con los valores:

o′82/83 $R_m = R_e - \dfrac{b}{2}$ | $m_{mn} = \dfrac{d_m}{z}$

o′84/85 $d_m = 2 \cdot R_m \cdot \text{sen}\,\delta$ | $F_{mt} = \dfrac{2 \cdot T}{d_m}$

(Continúa en O′8)

Véanse los subíndices en O′6 y los símbolos en O′9

Fuerzas axial y radial en el engrane

o'86 fuerza axial $F_a = F_{mt} \cdot \tan\alpha \cdot \operatorname{sen}\delta$

o'87 fuerza radial $F_r = F_{mt} \cdot \tan\alpha \cdot \cos\delta$

Capacidad de carga de la raíz del diente (cálculo aproximado)



Factor de seguridad S_F respecto a falla de la raíz del diente por fatiga:

o'88
$$S_F = \frac{\sigma_{F\,lím} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{\delta\,rel\,T} \cdot Y_{R\,rel\,T} \cdot Y_X}{\dfrac{F_{mt}}{b_{eF} \cdot m_{mn}} \cdot Y_{FS} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_K \cdot (K_A \cdot K_v \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta})} \geq S_{F\,mín}$$

Con excepción de Y_{ST}, se determinan los factores Y para engranajes rectos virtuales (subíndice "v").



Resulta la fórmula aproximada:

o'89
$$m_{mn} \geq \underbrace{\frac{F_{mt}}{b_{eF}}}_{0.85 \cdot b} \cdot Y_{FS} \cdot \underbrace{Y_\varepsilon \cdot K_{F\alpha}}_{\approx 1} \cdot \underbrace{Y_K}_{\approx 1} \cdot (K_A \cdot K_v) \overbrace{K_{F\beta}}^{\text{ver o'94}} \cdot \frac{S_{F\,lím}}{\underbrace{Y_{ST}}_{2} \cdot \underbrace{(Y_{\delta\,rel\,T} \cdot Y_{R\,rel\,T}\, Y_X)}_{\approx 1} \cdot \sigma_{F\,lím}}$$

o'90 Y_{FS}: Sustituir la cantidad de dientes del engrane recto complementario z_v. Así, la gráfica para engranes rectos de la página O'4 también se puede aplicar a engranes cónicos.

Ver todos los demás datos en o'57 a o'59.

Capacidad de carga del flanco del diente (cálculo aproximado)



Factor de seguridad S_H en el caso de corrosión de la superficie del diente.

o'91
$$S_H = \frac{\sigma_{H\,lim} \cdot (Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R) \cdot Z_X}{\sqrt{\dfrac{F_{mt}}{d_{v1} \cdot b_{eH}} \cdot \dfrac{u_v + 1}{u_v}} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_K \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}}} \geq S_{H\,mín}$$



Para los metales, el factor Z_E se simplifica como sigue:

o'92
$$Z_E = \sqrt{0.175\,E} \qquad \text{con} \qquad E = \frac{2\,E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$$

Obteniéndose la fórmula aproximada:



o'93
$$d_{m1} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot T_1 \cdot \cos\delta_1}{\underbrace{b_{eH}}_{0.85 \cdot b}} \cdot \frac{u_v + 1}{u_v} \cdot 0{,}175 \cdot E \cdot \frac{\overbrace{Z_H}^{\text{ver o'95}} \cdot \overbrace{Z_K}^{\approx 1} \cdot \overbrace{Z_\varepsilon \sqrt{K_{H\alpha}}}^{\approx 1} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v} \cdot \overbrace{\sqrt{K_{H\beta}}}^{\text{ver o'94}} \cdot S_{H\,mín}}{\underbrace{(Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R)}_{\text{ver o'66}} \cdot \underbrace{Z_X}_{\approx 1} \cdot \sigma_{H\,lím}}}$$

o'94 $K_{H\beta} = K_{F\beta} \approx$ 1.65 para piñón y engrane totalmente soportados
$\approx$ 1.88 para un elemento totalmente soportado y otro en voladizo
$\approx$ 2.25 para piñón y engrane en voladizo

Z_H: ver diagrama para Z_H (página O'5); sólo es válido para $(x_1 + x_2)(z_1 + z_2)$ con $\beta = \beta_m$.

o'95 $Z_H = 2.495$ para $\alpha = 20°$ y engranes normales o modificados.

Véanse todos los demás datos en o'63 a o'66

Notación para páginas O'1 a O'8 (ver subíndices en O'6)

a	distancia entre centros (a_d: distancia normal entre centros)
b	ancho de flanco
b_{eF}/b_{eH}	ancho efectivo de cara (base/flanco) para engranes cónicos
h_{a0}	adendo de la herramienta de corte
h_{aP}	adendo del perfil de referencia (por ejemplo DIN 867)
h_{fP}	dedendo del perfil de referencia
k^*	cambio del factor de adendo
z	número de dientes
F_t	fuerza periférica sobre el cilindro de paso (sección recta)
K_A	factor de aplicación
K_v	factor dinámico (respecto a fuerzas dinámicas adicionales originadas por desviaciones del engrane y vibración por flexión de diente)
$K_{F\alpha}/K_{F\beta}$	factor de carga transversal/carga en el flanco (esfuerzo en la raíz)
$K_{H\alpha}/K_{H\beta}$	factor de carga transversal/carga en el flanco (esfuerzo de contacto)
R_e	longitud total del cono de paso o primitivo (engranes cónicos)
R_m	longitud media del cono de paso o primitivo (engranes cónicos)
T	par de torsión
Y_{Fa}	factor de forma del diente (fuerza aplicada en la punta de un diente)
Y_{Fs}	factor de forma del diente para engrane externo
Y_{Sa}	factor de corrección por esfuerzo (aplicado en la punta del diente)
Y_{ST}	factor de corrección por esfuerzo
Y_{NT}	factor de duración
$Y_{R\,rel\,T}$	factor de superficie relativa
$Y_{\delta\,rel\,T}$	factor de sensibilidad relativa

(Y_{ST}, Y_{NT}, $Y_{R\,rel\,T}$, $Y_{\delta\,rel\,T}$: el índice "T" es para condiciones normales)

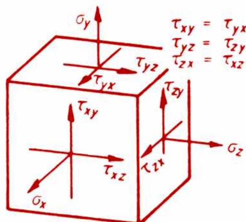
$Y_K/Y_\beta/Y_\varepsilon$	factor de tamaño/ángulo de hélice/relación de contacto para el dedendo del diente
$Z_E/Z_H/Z_L$	factor de elasticidad/zona/lubricación
$Z_{NT}/Z_R/Z_v$	factor de duración bajo condiciones normales/aspereza/velocidad
Z_W	factor de endurecimiento por trabajo
Z_K/Z_X	factor de conicidad/tamaño
Z_β/Z_ε	factor para flanco por ángulo de hélice/razón de contacto
α_n	ángulo de presión
α_P	ángulo de perfil de referencia (DIN 867: $\alpha_p = 20°$)
α_{wt}	ángulo de operación
β	ángulo de espiral para cilindro de paso helicoidal
β_b	ángulo de espiral para cilindro base de engranes helicoidales
ρ	ángulo de fricción dinámica ($\tan \rho = \mu$).
ρ_{aO}	radio de arista de punta de la herramienta.
$\sigma_{F\,lím}$	resistencia a la fatiga
$\sigma_{H\,lím}$	presión de Hertz (presión de contacto)

Cálculos exactos para engranes rectos y cónicos: DIN 3990.

Términos y definiciones para			
	engranes y trenes de engranes rectos	DIN 3960	o BS 2519
	engranes y trenes de engranes cónicos	DIN 3971	
	engranes de gusano recto	DIN 3975	

Estado de esfuerzo en tres dimensiones

La configuración general de los esfuerzos puede sustituirse por los:



Esfuerzos principales σ_1, σ_2, σ_3 que son las soluciones de la ecuación

p'1 $$\sigma^3 - R \cdot \sigma^2 + S \cdot \sigma - T = 0$$

p'2 donde $$R = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

p'3 $$S = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

p'4 $$T = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\,\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

La ecuación cúbica se resuelve como sigue:

La fórmula p'1 se iguala a y (en vez de a 0), y así $y = f(\sigma)$ se grafica. Los puntos de intersección con el eje o línea cero dan la solución. Tales valores se sustituyen en p'1 y se obtienen valores más exactos por ensayo e interpolación.

El caso en que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ da el esfuerzo cortante máximo

p'5 $$\tau_{max} = 0.5\,(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Flexión y torsión en ejes o árboles de sección circular

Según la teoría de la energía máxima de deformación:

p'6 Esfuerzo equivalente: $$\sigma_e = \sqrt{\sigma_f^2 + 3(\alpha_0 \cdot \tau_t)^2} \leqq \sigma_{f\,(perm.)}$$

Momento equivalente: $$M_e = \sqrt{M^2 + 0.75(\alpha_0 \cdot T)^2}$$

Para determinar el diámetro del eje se calcula el módulo de sección S necesario a partir de

p'7 $$S = \frac{M_e}{\sigma_{f(perm.)}}$$

σ_f	:	esfuerzo flexional de tensión
τ_t	:	esfuerzo cortante torsional
M	:	momento flexionante (o flector)
T	:	momento torsionante (o torsor)
α_0	:	se calcula según P'2

		Según la energía máxima de deformación para esfuerzo normal	esfuerzo cortante	esfuerzo equivalente
Estado de esfuerzo tridimensional		Tens. $\sigma_1 > 0: \quad \sigma_{vN} = \sigma_1 = \sigma_{máx}$ Compr. $\sigma_3 < 0: \quad \sigma_{vN} = \sigma_3 = \sigma_{mín}$	$\sigma_{vS} = 2\,\tau_{máx} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_e = \sqrt{0{,}5\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$
Estado de esfuerzo bidimensional		Tens. $\sigma_1 > 0: \quad \sigma_{vN} = \sigma_1 = \sigma_{máx}$ $= 0.5\left[(\sigma_z+\sigma_y) + \sqrt{(\sigma_z-\sigma_y)^2 + 4(\alpha_0\cdot\tau)^2}\right]$ Compr. $\sigma_2 < 0: \quad \sigma_{vN} = \sigma_2 = \sigma_{mín}$ $= 0.5\left[(\sigma_z+\sigma_y) - \sqrt{(\sigma_z-\sigma_y)^2 + 4(\alpha_0\cdot\tau)^2}\right]$	$\sigma_{vS} = 2\,\tau_{máx} = \sigma_1 - \sigma_2$ $= \sqrt{(\sigma_z-\sigma_y)^2 + 4(\alpha_0\cdot\tau)^2}$	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\cdot\sigma_2}$ $= \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z\cdot\sigma_y + 3(\alpha_0\cdot\tau)^2}$
Cargas I, II, III para σ y τ	iguales	$\alpha_0 = 1$	$\alpha_0 = 1$	$\alpha_0 = 1$
	desi-guales	$\alpha_0 = \dfrac{\sigma_{perm.}\ \text{I, II, III}}{\tau_{perm.}\ \text{I, II, III}}$ $= \dfrac{\sigma_{lím.}\ \text{I, II, III}}{\tau_{lím.}\ \text{I, II, III}}$	$\alpha_0 = \dfrac{\sigma_{perm.}\ \text{I, II, III}}{2\cdot\tau_{perm.}\ \text{I, II, III}}$ $= \dfrac{\sigma_{lím.}\ \text{I, II, III}}{2\cdot\tau_{lím.}\ \text{I, II, III}}$	$\alpha_0 = \dfrac{\sigma_{perm.}\ \text{I, II, III}}{1.73\cdot\tau_{perm.}\ \text{I, II, III}}$ $= \dfrac{\sigma_{lím.}\ \text{I, II, III}}{1.73\cdot\tau_{lím.}\ \text{I, II, III}}$
Aplica-ción	Tipo de acción y material	Tensión, flexión, torsión de materiales frágiles: hierro fundido, vidrio, piedra	Compresión de materiales frágiles y dúctiles. Tensión, flexión y torsión de acero con punto de fluencia bien definido	Todo esfuerzo de materiales dúctiles: acero fundido, forjado y laminado; aluminio, bronce
	Falla esperada	Fractura seca	Fractura con desgarre, fluencia, deformación acentuada.	Fractura seca, con desgarre, separación permanente;

*)Dan la mejor concordancia con los resultados de prueba
$\sigma_{lím}$, $\tau_{lím}$ son valores típicos para los materiales.

σ_1, σ_2, σ_3 véase P'1

Análisis de esfuerzos

Datos de secciones transversales

Momentos de inercia *I* y módulos de sección *S*

Para la posición del centroide *C* (y el eje neutro) véase K 7, Parte I

	I_x e I_y (valores mínimos)	S_x y S_y (valores mínimos)	Sección transversal (área *A*)
p′8	$I_x = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$	$S_x = \dfrac{b \cdot h^2}{6}$	
p′9	$I_y = \dfrac{h \cdot b^3}{12}$	$S_y = \dfrac{h \cdot b^2}{6}$	
p′10	$I_x = I_y = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64}$	$S_x = S_y = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32} \approx \dfrac{d^3}{10}$	
p′11	$I_x = I_y = \dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$S_x = S_y = \dfrac{\pi}{32} \cdot \dfrac{D^4 - d^4}{D} \approx \dfrac{D^4 - d^4}{10\,D}$	
p′12	$I_x = I_y = 0.06014 \cdot s^4 = 0.5412 \cdot R^4$	$S_x = 0.1203 \cdot s^3 = 0.6250 \cdot R^3$	
p′13		$S_y = 0.1042 \cdot s^3 = 0.5413 \cdot R^3$	
p′14	$I_x = \dfrac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4}$	$S_x = \dfrac{\pi \cdot a \cdot b^2}{4}$	
p′15	$I_y = \dfrac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$	$S_y = \dfrac{\pi \cdot a^2 \cdot b}{4}$	
p′16	$I_x = \dfrac{b \cdot h^3}{36}$	$S_x = \dfrac{b \cdot h^2}{24}$	$e_{máx} = \frac{2}{3} h$
	I_x y S_x corresponden también a un triángulo irregular		
p′17	$I_y = \dfrac{b^3 \cdot h}{48}$	$S_y = \dfrac{b^2 \cdot h}{24}$	
p′18	$I_x = \dfrac{h^3}{36} \cdot \dfrac{(a+b)^2 + 2ab}{a+b}$	$S_x = \dfrac{h^2}{12} \cdot \dfrac{(a+b)^2 + 2ab}{2a+b}$	
p′19	$e_{máx} = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{2a+b}{a+b}$		
p′20	$e_{mín} = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{a+2b}{a+b}$		

Teorema de Steiner: (Para valores de *I* con respecto a dos ejes paralelos; uno es centroidal, *x*)

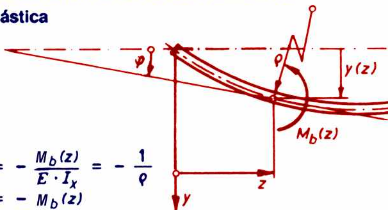


p′21 $I_{B\text{-}B} = I_x + A \cdot a^2$

Viga de sección transversal uniforme

Ecuación de la curva elástica

Lo siguiente se aplica a cada tramo de la viga:



p'22 $$\frac{d^2y\,(z)}{dz^2} = y''(z) = -\frac{M_b(z)}{E \cdot I_x} = -\frac{1}{\rho}$$

p'23 $$E \cdot I_x \cdot y''(z) = -M_b(z)$$

p'24 $$E \cdot I_x \cdot y'(z) = -\int M_b(z)\,dz + C_1$$

p'25 $$E \cdot I_x \cdot y\,(z) = -\iint M_b(z)\,dz \cdot dz + C_1 \cdot z + C_2$$

ρ : Radio de curvatura de la elástica en el sitio z

p'26 $y'(z) = \tan \varphi\,(z)$: Pendiente de la tangente a la elástica en el sitio z.

$y\,(z)$ = Deflexión de la viga en el sitio z

C_1 y C_2 son constantes de integración a determinar por factores conocidos

P. ej.: $y\,(z) = 0$. En el apoyo.

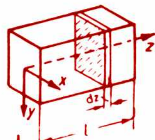
$y\,(z)_i = y(z)_{i+1}$. En la unión entre los tramos i e $(i + 1)$

$y'(z) = 0$. En el empotramiento de una viga en voladizo y en punto medio de una viga con carga simétrica.

$y'(z)_i = y'(z)_{i+1}$. En la unión entre los tramos i e $(i + 1)$

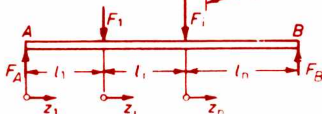
Energía de deformación U a la flexión

Para una viga de longitud l



p'27 $$U_f = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{z=l} \frac{M_b^2(z)}{E \cdot I_x}\,dz$$

Para una viga continua:
(n tramos)



p'28 $$U_{f(tot.)} = \frac{1}{2E}\left(\int_{z_1=0}^{z_1=l_1} \frac{M_b^2(z)}{I_{x1}}\,dz_1 + \ldots + \int_{z_n=0}^{z_n=l_n} \frac{M_b^2(z)}{I_{xn}}\,dz_n\right)$$

Análisis de esfuerzos P'5

Vigas - Cargas y deflexiones

Tipo de carga	Acciones en los apoyos	Mom. máx. en el punto (...)	Elástica y deflexión / Pendiente, $\tan\varphi = y'$	Deflexiones: y_C, en C; y_m, máx.
	$R_A = F$ $M_A = F\cdot l$	$F\cdot l$ (A)	$y(z) = \frac{F l^3}{6EI}\left(2-3\frac{z}{l}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $\tan\varphi_B = -\frac{F l^2}{2EI}$	$y_m = \frac{F l^3}{3EI}$
Nota: $a>b$	$R_A = F\frac{b}{l}$ $R_B = F\frac{a}{l}$	$F\frac{a\,b}{l}$ (C)	$y_1(z_1) = \frac{F l^3}{6EI}\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{b^2}{l^2}\cdot\frac{z_1}{l}\left(1+\frac{l}{b}-\frac{z_1^2}{ab}\right)$ $y_2(z_2) = \frac{F l^3}{6EI}\cdot\frac{b}{l}\cdot\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{z_2}{l}\left(1+\frac{l}{a}-\frac{z_2^2}{ab}\right)$ $\tan\varphi_A = \frac{y_C}{2a}\left(1+\frac{l}{b}\right)$ $\tan\varphi_B = \frac{y_C}{2b}\left(1+\frac{l}{a}\right)$	$y_C = \frac{F l^3}{3EI}\cdot\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{b^2}{l^2}$ $y_m = y_C\frac{l+b}{3b}\sqrt{\frac{l+b}{3a}}$ y_m en el sitio $z_1 = a\sqrt{\frac{l+b}{3a}}$
Nota: $a>b$	$R_A = F - R_B$ $R_B = F\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{a}{l}+\frac{3b}{2l}\right)$ $M_A = F\frac{l+b}{2}\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}$	M_A (A) cuando $b = 0{,}414\,l$: $0{,}171Fl$ (C) $-0{,}171Fl$ (A)	$y_1(z_1) = \frac{R_B l^3}{6EI}\left(3\frac{z_1}{l}-\frac{z_1^3}{l^3}\right)-\frac{F\cdot a^2\cdot z_1}{2\cdot E\cdot I}$ $y_2(z_2) = \frac{F\cdot a^3}{6EI}\left(2-2\frac{z_2}{a}+\frac{z_2^3}{a^3}\right)-$ $-\frac{R_B l^3}{6EI}\left(2-3\frac{z_1}{l}+\frac{z_1^3}{l^3}\right)$ $\tan\varphi_B = F a^2 b/(4EIl)$	$y_C = \frac{R_B l^3}{6EI}\left(3\frac{b}{l}-\frac{b^3}{l^3}\right)-$ $-\frac{F a^2 b}{2EI}$
Nota: $a<b$	$R_A = F\frac{b^2}{l^2}\left(3-2\frac{b}{l}\right)$ $R_B = F\frac{a^2}{l^2}\left(3-2\frac{a}{l}\right)$ $M_A = F a b^2/l^2$ $M_E = F b a^2/l^2$	$-Fa\frac{b^2}{l^2}$ (A) $-Fb\frac{a^2}{l^2}$ (B) $2Fl\frac{a^2}{l^2}\frac{b^2}{l^2}$ (C)	$y_1(z_1) = \frac{F}{6EI}\frac{b^2}{l^2}\left(3az_1^2-3z_1^3+2\frac{b}{l}z_1^3\right)$ $y_2(z_2) = \frac{F}{6EI}\frac{a^2}{l^2}\left(3bz_2^2-3z_2^3+2\frac{a}{l}z_2^3\right)$ $\tan\varphi_A = \tan\varphi_B = 0$	$y_m = \frac{2Fl^3}{3EI}\cdot\frac{b^3}{l^3}\cdot\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{l}{2b+l}\right)^2$ y_m en el sitio $z_2 = \frac{2l\cdot b}{2b+l}$ $y_C = \frac{F}{3EI}\cdot\frac{a^3 b^3}{l^3}$

Análisis de esfuerzos

Vigas – Cargas y deflexiones

Tipo de carga	Acciones en los apoyos	Mom. máx. en el punto (. . .)	Elástica y deflexión / Pendiente, $\tan = y'$	Definiciones / y_C, en C; y_m, máx.
Voladizo con carga puntual F en C; l, a, A, B, C, φ_A, φ_B, φ_C, y_m, z_1, y_1, z_2, y_2	$R_A = F\frac{a}{l}$ $R_B = F\left(1+\frac{a}{l}\right)$	$-F\cdot a$ (B)	$y_1(z_1) = \frac{F a l^2}{6EI}\left(\frac{z_1^3}{l^3}-\frac{z_1}{l}\right)$ $y_2(z_2) = \frac{F}{6EI}(2a l z_2+3a z_2^2-z_2^3)$ $\tan\varphi_A = -\frac{F a l}{6EI}$; $\tan\varphi_B = \frac{F a l}{3EI}$ $\tan\varphi_C = \frac{F a}{6EI}(2l+3a)$	$y_{m_1} = -\frac{F a l^2}{9\sqrt{3}EI}$ y_{m_1} en el sitio $z_1 = 0.577\cdot l$ $y_{m_2} = y_C = \frac{F a^2}{3EI}(l+a)$
w=const.; l, A, B, φ_B, y_m, z, y	$R_A = w l$ $M_A = \frac{1}{2} w l^2$	$\frac{1}{2} w\cdot l^2$ (A)	$y(z) = \frac{q l^4}{24EI}\left(\frac{z^4}{l^4}-4\frac{z}{l}+3\right)$ $\tan\varphi_B = -\frac{q l^3}{6EI}$	$y_m = \frac{q l^4}{8EI}$
w=const.; l, $\frac{l}{2}$, A, B, C, φ_A, φ_B, y_m, z, y	$R_A = R_B = \frac{w l}{2}$	$\frac{w\cdot l^2}{8}$ (C)	$y(z) = \frac{q l^4}{24EI}\cdot\frac{z}{l}\left(1-2\frac{z^2}{l^2}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $\tan\varphi_A = \frac{q l^3}{24EI} = -\tan\varphi_B$	$y_m = \frac{5 q l^4}{384EI}$
w = const.; l, A, B, φ_B, $0{,}4215\cdot l$, y_m, z, y	$R_B = \frac{3}{8} w l$ $R_A = \frac{5}{8} w l$ $M_A = \frac{1}{8} w l^2$	M_A (A)	$y(z) = \frac{q l^4}{48EI}\left(\frac{z}{l}-3\frac{z^3}{l^3}+2\frac{z^4}{l^4}\right)$ $\tan\varphi_B = \frac{q l^3}{48EI}$	$y_m = \frac{q l^4}{185EI}$ y_m en el sitio $z = 0.4215\cdot l$
w = const.; l, $\frac{l}{2}$, A, B, y_m, z, y	$R_A = w\cdot l/2$ $R_B = w\cdot l/2$ $M_A = w\cdot l^2/12$ $M_B = w\cdot l^2/12$	$-\frac{w l^2}{12}$ (A, B) $\frac{w l^2}{24}$ (C)	$y(z) = \frac{q l^4}{24EI}\left(\frac{z^2}{l^2}-2\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)$ $\tan\varphi_A = \tan\varphi_B = 0$	$y_m = \frac{q l^4}{384EI}$

Las expresiones para y y y_m no consideran el efecto del cortante

Vigas hiperestáticas

Conversión a isostática – cálculo de reacciones

Una viga hiperestática (o indeterminada estáticamente) (Fig. 1) se convierte en una isostástica o determinada (Fig. 2) sustituyendo un apoyo por su reacción (R_C, en la Fig. 2).

La isostática se considera formada por dos subsistemas componentes (I y II). Se calculan las deflexiones en el punto o apoyo de hiperestaticidad (véase P'4 a P'6) para cada subsistema, en función de R_C.

Como no puede ocurrir deflexión real en el apoyo C.

p'37

$$|y_{c1}| = |y_{c2}|$$

Se evalúa entonces R_C y luego las demás reacciones en los apoyos.

Fig. 1

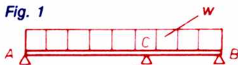
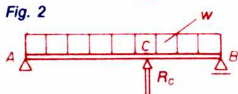
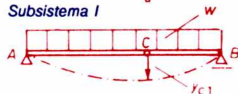


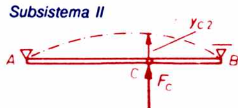
Fig. 2



Subsistema I



Subsistema II



Resolución de vigas hiperestáticas, simples

Sistema hiperestático	Sistema isostático	Subsistema I	Subsistema II
F_1, C, F_2, A, B	F_1, C, F_2, A, F_c, B	F_1, F_2, A, B, y_{C1}	y_{C2}, A, F_c, B
	F_1, C, F_2, A, B, R_B	F_1, C, F_2, B, A, y_{B1}	y_{B2}, A, C, R_B, B
F, A, B	F, A, R_A, B	A, F, B, y_{A1}	y_{A2}, A, B, R_A
w, C, A, B, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	M_A, w, M_B, C, A, B	w, C, A, B, y_{C1}	y_{C2}, A, C, B, M_A, M_B

: Reacciones y momentos en apoyos hiperestáticos.

Ejes y árboles (cálculo aproximado)

Estabilidad

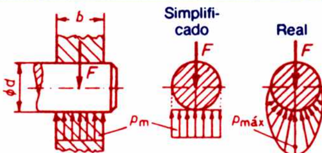
	Ejes	Mód. de secc. a la flexión requerido (S_f)	Diámetro de eje macizo circular ($S_f \approx d^3/10$)	Esfuerzo permisible a la flexión[2]
q'1 q'2	fijos[1]	$S_f = \dfrac{M}{\sigma_{f\,perm.}}$	$d = \sqrt[3]{\dfrac{10 \cdot M}{\sigma_{f\,perm.}}}$	$\sigma_{f\,perm.} = \dfrac{\sigma_{b\,Sch}}{(3\ldots5)}$
q'3	rotatorios			$\sigma_{f\,perm.} = \dfrac{\sigma_{alt}}{(3\ldots5)}$

	Arboles	Mód. de secc. a la torsión requerido (S_t) (polar)	Diámetro de árbol macizo ($S_t \approx d^3/5$)	Esfuerzo permisible a la tensión[2]
q'4 q'5	Torsión pura	$S_t = \dfrac{T}{\tau_{t\,perm.}}$	$d = \sqrt[3]{\dfrac{5 \cdot T}{\tau_{t\,perm.}}}$	$\tau_{t\,perm.} = \dfrac{\tau_{t\,Sch}}{(3\ldots5)}$
q'6	Torsión Flexión			$\tau_{t\,perm.} = \dfrac{\tau_{t\,Sch}}{(10\ldots15)}$

Presión de contacto (aplastamiento) (p)

q'7 En el muñón } $p_m = \dfrac{F}{d \cdot b} \leqq p_{perm.}$

(véase Z'4)



Cortante debido a carga transversal: Cálculo innecesario cuando

Para elementos de sección circular (rotatorios) $\ell > d/4$

Para elementos de sección rectangular (barras fijas) $\ell > 0.325\ h$.

Deformación por flexión véase P'5

por torsión véase P 7 (Parte I)

Vibraciones, véase M 6 (Parte I)

---

[1] Para las clases de carga constante (I) y pulsante (II) (véase P 1, Parte I) y perfiles simples (I, ☐).

[2] $\sigma_{f\,perm.}$ y $\tau_{t\,perm.}$ consideran los factores de concentración, rugosidad, tamaño, seguridad y combinación de acciones.
En $\tau_{t\,perm.}$, además el momento flexionante.

---

l : distancia de la fuerza F

M, T : momento flexionante, momento torsionante

p_m : esfuerzo de contacto o aplastamiento (para $p_{perm.}$ véase Z'4)

$p_{máx.}$: véase q'17; para otros casos véase Z'4.

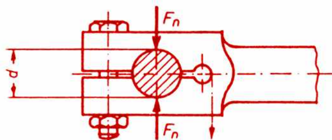
puls : condición pulsante (véase P 1, Parte I)

alt : condición alternante (véase P 1, Parte I).

Uniones de pasador

Unión de abrazadera

q′8 $$F_n = \frac{T \cdot \nu}{\mu \cdot d}$$

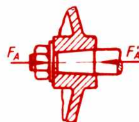


Junta ideal sin demasiada rigidez

Unión de cono

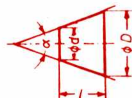
q′9 conicidad $1 : x = (D - d) : l$

Fórmula aproximada para la fuerza axial sobre la tuerca (F_A):



q′10 $$F_A = \frac{2 \cdot T \cdot \nu}{\mu \cdot d_m} \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \varrho\right)$$

q′11 $$d_m = \frac{D + d}{2}$$

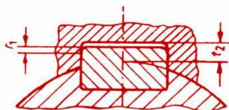


Uniones ranuradas

De cuña plana (cálculo aproximado)

El cálculo se basa en la presión de contacto o aplastamiento sobre la cara de la cuña (o chaveta) en el material de menor resistencia. Tomando en cuenta la curvatura del eje o árbol y el redondeo r_1, la altura efectiva del elemento puede considerarse aproximadamente como t_e.

q′12 $$l = \frac{2 \cdot T}{d \cdot t_e \cdot p_{perm.}}$$



(continúa en Q′3)

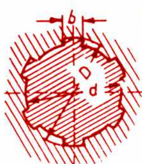
El significado de los símbolos está en Q′3.

(Continuación de Q′2)

De rebordes múltiples









q′13 $$l = \frac{2\,T}{d_m \cdot h \cdot f \cdot n \cdot p_{perm.}}$$

q′14 $$d_m = \frac{D + d}{2}$$

q′15 $$h = \frac{D - d}{2} - g - k \approx \frac{D - d}{2}$$

La carga no se reparte equitativamente entre las ranuras y los rebordes, de modo que hay que aplicar un factor de ajuste f:

Elemento	f
Reborde en eje	0.75
Ranura en cubo	0.9

Dimensiones del cubo

Se utiliza el diagrama de configuración de uniones ranuradas de Q′4.

Ejemplo: Determinar la longitud L y el espesor radial s de un cubo para eje que transmitirá un momento de rotación de 3 000 N · m, hecho de acero colado y con ranura para cuña plana.

1. Se elige el intervalo apropiado según el tipo de unión "long. cubo L, AC/AN: grupo e" y se siguen las líneas de "e" hasta cortar la vertical en el punto base de 3 000 N · m. Resultado: L = (110 ... 140 mm), leído en la escala de L, s.
2. Se selecciona el intervalo apropiado según el tipo de unión "esp. radial s, AC, AN: grupo l", y se siguen las líneas de "l" hasta que se logre cortar la vertical en el punto base de 3 000 N · m. Resultado: s = (43 ... 56) mm, leído en la escala de L, s.

F_n : Fuerza normal en la superficie de contacto
l : Longitud efectiva de la unión
n : Número de ranuras
μ : Coeficiente de fricción (o rozamiento) deslizante
v : Factor de seguridad
φ : Angulo de fricción ($\varphi = \tan^{-1} \mu$)
$p_{perm.}$: Presión de contacto (aplastamiento) permisible. Para cálculo aproximado:

Material	$p_{perm.}$ N/mm²	
HC (hierro colado) (gris)	40 . . . 50	(en casos especiales, se usan valores mayores)
AC (acero colado), AN (acero común)	90 . . . 100	

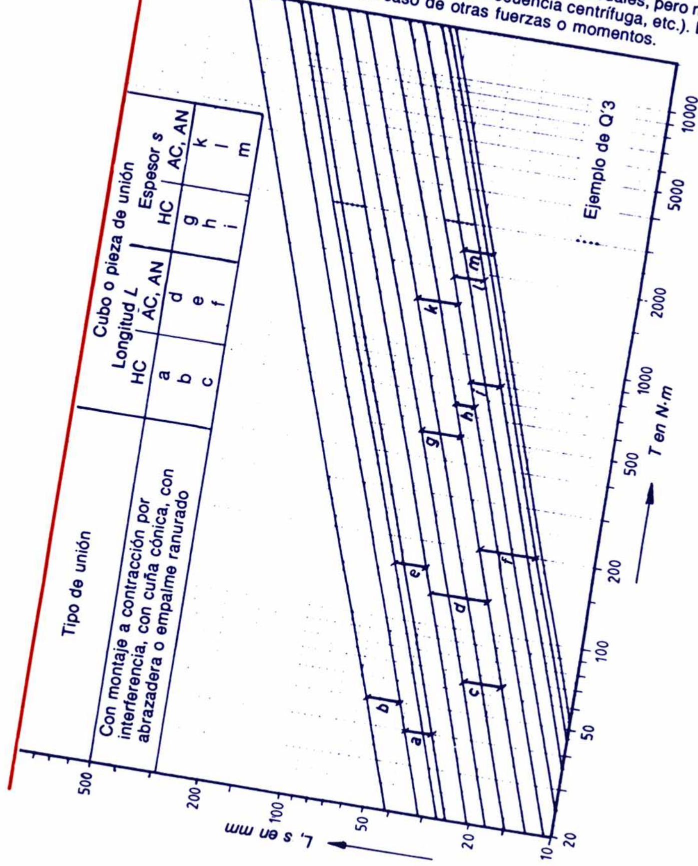
Maquinaria y elementos

Configuración en uniones

Q´4

Diagrama para Q´3

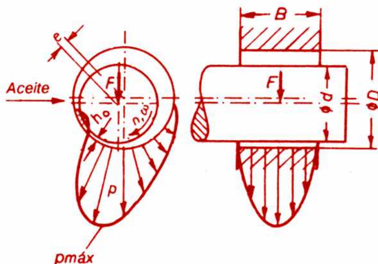
Valores empíricos para ejes o árboles hechos de aceros usuales, pero no para casos especiales (como en el caso de alta frecuencia centrífuga, etc.). La longitud L debe aumentarse en caso de otras fuerzas o momentos.



Cojinete de deslizamiento (chumacera)

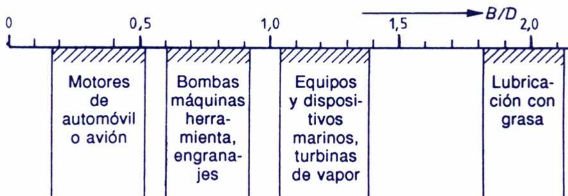
Lubricación hidrodinámica entre el muñón y el cojinete

La operación correcta es a temperaturas no excesivas y sin un desgaste notable. Es decir, con la separación permanente por película de aceite lubricante entre muñón y cojinete.



Distribución transversal y longitudinal de la presión

Relación anchura a diámetro *B/D*



Propiedades generales

Chumaceras cortas	Chumaceras largas
Gran caída de presión en cada extremo; por tanto, enfriamiento eficaz; con flujo de aceite adecuado. Excelente para altas velocidades de rotación. Baja capacidad de carga con bajas velocidades rotacionales.	Baja caída de presión en cada extremo; por tanto, alta capacidad de carga, con velocidades de rotación no elevadas. Enfriamiento deficiente. Exceso posible de carga en bordes.

(continúa en Q′6)

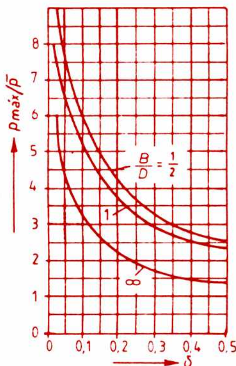
(Continuación de Q′5)

Presión de contacto (aplastamiento) $\bar{p}$, $p_{máx.}$

q′16	media	Presión de contacto	$\bar{p} = \frac{F}{D \cdot B}$
q′17	máxima		$p_{máx} \leq \frac{2}{3} \sigma_{dF}$

La presión máxima depende principalmente del espesor relativo de la capa de lubricante.

El diagrama muestra la razón de la presión máxima a la presión media ($p_{máx} / \bar{p}$) en función del espesor relativo de la película lubricante.



Holgura absoluta s y relativa ψ en la chumacera

q′18 $s = D - d$; $\psi = s/D$

ψ es básicamente la holgura que se produce durante el funcionamiento (incluyendo la dilatación térmica y la deformación elástica).

q′19 Valores típicos $\psi = (0{,}3 \ldots 1 \ldots 3)\ 10^{-3}$ [1)]

Criterios para la selección de ψ

Características	Valor inferior	Valor superior
Material del cojinete:	suave (p. ej. metal blanco)	duro (p. ej. bronce fosforado)
Viscosidad:	relativamente baja	relativamente alta
Velocidad periférica:	relativamente baja	relativamente alta
Presión de contacto:	relativamente alta	relativamente baja
Relación ancho/diám:	$B/D \leq 0{,}8$	$B/D \geq 0{,}8$
Apoyo:	autoalineante	rígido

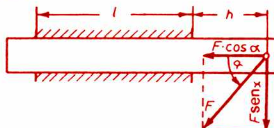
q′20 Valores mínimos para plásticos $\psi \geq (3 \ldots 4)\ 10^{-3}$

q′21 metales sinterizados $\psi \geq (1{,}5 \ldots 2)\ 10^{-3}$

q′22 1) Para chumaceras lubricadas con grasa $\psi = (2 \ldots 3)\ 10^{-3}$

Guía para elemento deslizante

La guía funciona suavemente sólo cuando



q'23 $\tan\alpha < \dfrac{l}{(2\cdot h + l)\cdot\mu}$ o bien

la siguiente relación

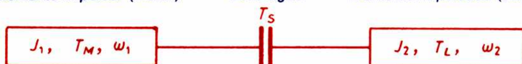
q'24 $\dfrac{l}{h} = \lambda > \dfrac{2\ \mu\ \tan\alpha}{1 - \mu\ \tan\alpha}$

Si las condiciones anteriores para tan α no se satisfacen hay peligro de desviación y trabamiento.

Embragues de fricción

Pérdida de energía y tiempo de deslizamiento

Elemento impulsor (motor) *Embrague* *Elemento impulsado (carga)*



Un modelo simplificado con las siguientes condiciones basta para un cálculo aproximado:

Aceleración del elemento impulsado de $\omega_2 = 0$ a $\omega_2 = \omega_1$.

ω_1 = const.; T_L = const.; T_S = const.$> T_L$. Entonces por operación:

q'25 Pérdida de energía $W_V = J_2 \cdot \dfrac{\omega_1^2}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{T_L}{T_S - T_L}\right)$

q'26 Tiempo de deslizamiento $t_r = \dfrac{J_2 \cdot \omega_1}{T_S - T_L}$

Cálculo de la superficie de fricción

Embragues de placas planas: Una Superficie(s)	Embragues de placas planas: Dos Superficie(s)	Acción múltiple	Embragues cónico	Embragues cilíndrico
			α	

El número y el área de las superficies de fricción dependen de la presión de contacto permisible $p_{perm.}$ y de la capacidad térmica permisible por unidad de área (conducción de calor) q_{perm}.

(continúa en Q'8).

Significado de los símbolos en Q'9

(Continuación de Q'7)

Cálculo para presión de contacto *p*

Para todos los tipos de superficies de fricción:

q'27 $$i \cdot A \geq \frac{T_S}{p_{perm.} \; \mu_{din} \cdot R_m}$$

donde

q'28 $$R_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{R_a^3 - R_i^3}{R_a^2 - R_i^2} \approx \frac{R_a + R_i}{2}$$

	Superficies de fricción	planas	cónicas	cilíndricas
q'29	Fuerza axial	$F_a = A \cdot p$	$F_a = A \; p$ sen α	–
q'30		para embragues de placas múltiples	Condición $\tan \alpha > \mu_{stat}$, si no, habrá trabamiento	$R_a = R_i = R_m$
q'31		$\frac{R_i}{R_a} = 0.6\ldots0.8$		

Para un eje: $T_U = T_S \cdot \frac{\mu_{est}}{\mu_{din}}$

Calentamiento permisible:

Para *arranque con carga pesada* la temperatura máxima se alcanza en una operación. Depende de la pérdida de energía, tiempo de deslizamiento, calor de conducción, calor específico y enfriamiento. Estas cantidades no pueden incorporarse en una fórmula general.

En el caso de *operación continua* la temperatura constante se establece sólo después de varias operaciones. Hay valores empíricos de la conducción térmica permisible por unidad de área, q_{perm}, en la operación continua.

q'32 Potencia friccional: $P_f = W_V \cdot z$

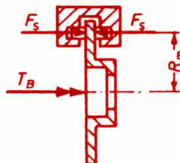
q'33 Condición: $i \cdot A \geq \frac{W_V \cdot z}{q_{perm.}}$

Significado de los símbolos en Q'9.

Frenos de fricción

Todos los embragues de fricción pueden corresponder a frenos de acción por rozamiento. (Véase también Q′7 y Q′8)

Frenos de disco



Con elementos auxiliares.
Momento de frenado, T_B:

q′34 $$T_B = 2 \cdot \mu \cdot F_S \cdot j \cdot R_m$$

Frenos de zapatas

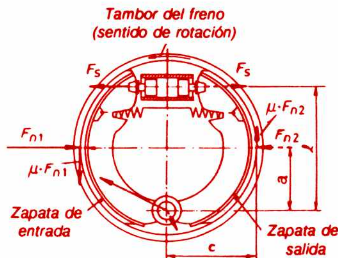
Se ilustra un dispositivo de acción simplex, indicando las fuerzas actuantes.

de entrada	de salida
$F_{n1} = \dfrac{F_S \cdot l}{a - \mu \cdot c}$ (Servo-acción)	$F_{n2} = \dfrac{F_S \cdot l}{a + \mu \cdot c}$

q′35

Momento de frenado

q′36 $$T_B = (F_{n1} + F_{n2}) \cdot \mu \cdot R$$



(Para la acción de frenado de banda o cinta véase K 13, Parte I.)

Símbolos para embragues y frenos de fricción

- A : Area de la superficie de fricción
- T_B Momento de frenado
- T_L : Momento de la carga
- T_M : Momento del motor
- T_S : Momento de operación del embrague
- T_{tr} : Momento de transferencia del embrague
- R : Radio de la superficie de fricción
- R_m, R_a, R_i : Radios medio, exterior o interior de la superficie
- W_y : Pérdida de energía por operación
- i : Número de superficies de fricción
- j : Número de elementos para disco
- z : Frecuencia de operación (EU: s^{-1}; h^{-1})
- μ, μ_{din}, μ_{est} : Coeficiente de fricción, estática y dinámica
- ω : Velocidad de rotación (angular)

Diseño de máquinas-herramienta: Consideraciones generales.

Las componentes de máquinas que estarán sometidos a esfuerzos (elementos con superficies guías, piezas deslizantes, correderas husillos con cojinetes) se diseñan de modo que conserven una elevada exactitud o ajuste durante largo tiempo. Cuentan con amplias áreas de contacto o apoyo y son necesarios dispositivos para reemplazar las superficies desgastadas. La deformación máxima permisible en el filo o borde cortante (punta de formación de la viruta) es de aproximadamente 0.03 mm. La fórmula r′4 da la fuerza de corte.

Están disponibles elementos impulsores con velocidad de corte v = const. en todo el alcance de trabajo (diámetros máximo y mínimo de la herramienta o de la pieza) con velocidades de rotación (en rpm, r/min), en una gama que va en progresión geométrica:


r′1

$$n_k = n_1 \ \rho^{k-1}$$

La razón progresiva ρ para las velocidades de rotación $n_1 \ldots n_k$, para k velocidades se evalúa por


r′2

$$\rho = \sqrt[k-1]{\frac{n_k}{n_1}}$$

Valores de ρ estandarizados: 1.12, 1.25, 1.4, 1.6, 2.0.

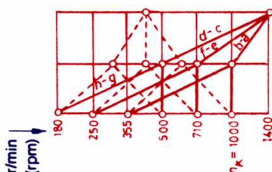
Serie básica R_{20} de velocidades con $\rho = \sqrt[20]{10} = 1.12$:

100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 224, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 550, 630, 710, 800, 900, 1000, . . . r/min.

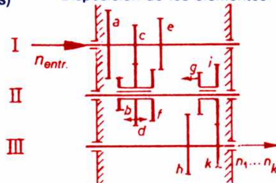
Dispositivos de corte: Se designan por el número de ejes y las velocidades de salida.

Ejemplo: Un equipo III/6 tiene 3 ejes y 6 velocidades. Se ilustra como sigue (para k = 6, ρ = 1.4, n_1 = 180, n_k = 1000).

- - - Diagrama de escalas (simétricas)
—— Diagrama de velocidades



Disposición de los elementos



Los símbolos se explican en R′5.

Potencia y fuerza de corte:

			General	Taladrado
r'3	Potencia de corte	P_c =	$\dfrac{F_c \cdot v}{\eta_{mec} \cdot \eta_{eléc}}$	$\dfrac{F_c\,(D+d)\pi \cdot n}{2 \cdot \eta_{mec} \cdot \eta_{eléc}}$
r'4	Fuerza de corte	F_c =	$K \cdot k_{c1.1} \cdot b \left(\dfrac{h}{mm}\right)^{1-mc} mm \cdot z_e$	

Tabla de valores de K, b, h, z_e (para k_{C11}; $1 - mc$, véase Z'3)

No.	Operación	Croquis	K =	b =	h =	z_e =	Observaciones
r'5	Torneado (exterior longitudinal)		1 HM + HSS	$\dfrac{a}{\text{sen}\,\theta}$	$s \cdot \text{sen}\,\theta$	1	
r'6	Torn. inter	analoga a r'5	1.2				
r'7	Cepillado (común y de mesa)		1.1 HM 1.2 HSS				
r'8	Taladrado y abocardado		0,85 HM 1 HSS	$\dfrac{D-d}{2\,\text{sen}\,\frac{\sigma}{2}}$	$s_z \cdot \text{sen}\,\frac{\sigma}{2}$ $s_z = 0.5\,s$	(para broca espiral)	$d = 0$ (en taladrado) $\sigma = 118°$ (para acero)
r'9	Corte normal y entrecorte: Fresado (común)		1.1 HM 1.2 HSS	B	$\dfrac{2a}{D\,\varphi_s} s_z$	$\dfrac{\varphi_s\, z_s}{360°}$	$\cos\varphi_s = 1 - 2a/D$
r'10	Corte normal y entrecorte: Fresado (extremos)			$\dfrac{a}{\text{sen}\,\theta}$	$(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \cdot \dfrac{1}{\varphi_s} s_z \cdot \text{sen}\,\theta$		$\varphi_s = \varphi_2 - \varphi_1$ $\cos\varphi_1 = \dfrac{2\,B_1}{D}$ $\cos\varphi_2 = \dfrac{2\,B_2}{D}$ φ_1 y φ_2 se calculan en el sentido de rotación

Los símbolos se explican en R'5.

Los símbolos se explican en R'5.

No.	Operación	Croquis	$K =$	$b =$	$h =$	$z_e =$	Observaciones
r' 11	Rectificado plano	φ_s, a, D, B_s, b_w, b_w	Tab. 1	b_w	$\frac{l_K \cdot u}{v}\sqrt{\frac{a}{D}}$	$\frac{D\,\varphi_s}{2\,l_K}$	$(\cos\varphi_s = 1 - 2a/D$
r' 12	Rectificado redondo	exterior: D, φ_s, a, d_w; interior: d_w, D, φ_s, a			$\frac{l_K \cdot u}{v}\sqrt{a\left(\frac{1}{D} \pm \frac{1}{d_w}\right)}$ + exterior − interior		$\varphi_s = \sqrt{\frac{4a}{D(1 \pm D/d_w)}}$ + exterior − interior
r' 13	Acción de corte (redondo)						
r' 14	Rectificado de extremo	φ_1, φ_s, φ_2, $B_2 \cdot B_1$, B, φD, a		a	$(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \cdot \frac{1}{\varphi_s} \cdot \frac{l_K \cdot u}{v}$		El ángulo φ_s según r'10

Tabla 1

Tamaño del grano \ h en mm	0.001	0.002	0.003	0.004
	Factor de corrección			
40	5.1	4.3	4.0	3.6
60	4.5	3.9	3.5	3.2
80	4.0	3.6	3.2	3.0
120	3.4	3.0	2.8	2.5
150	3.2	2.8	2.6	2.3
180	3.0	2.6	2.4	2.2

Tabla 2

Tamaño del grano \ a en mm	Desbastado 0.01	0.02	0.03	Alisado 0.003	0.004	0.005	0.006
	Distancia efectiva del grano ℓ_K						
40	24	14	9	–	–	–	–
60	32	23	15	39	38	37	36
80	40	31	24	47	46	45	44
120	53	44	37	60	59	58	57
150	56	48	40	64	63	62	61
180	58	50	42	66	65	64	63

Impulsión

Valores en progresión geométrica con

$$\varphi = 1.12 - 1.25 - 1.4 - 1.6 - 2.0.$$

Avances (alimentaciones)

	Operación	Velocidad de avance	Observaciones
r′15	Torneado (long., exterior e interior)	$u = n \cdot s$	
r′16	Taladrado	$u = n \cdot s_z \cdot z_S$	Para brocas espirales $z_e = z_S = 2$; $s_z = 0.5\ s$
r′17	Cepillado (común y de mesa)	$u = v$	
r′18	Fresado, plano y de extremo	$u = s_z \cdot n \cdot z_S$	

Tiempos de corte t_c

r′19 $$t_c = \frac{l_1}{u}\ ; \quad \text{donde} \quad l_1 = l + l'.$$

Al calcular los tiempos de ciclo y maquinado para cada pieza trabajada, deben considerarse los movimientos de avance o alimentación y los recorridos libres (o un corte), divididos entre las velocidades correspondientes.

Potencia y fuerza de avance

r′20 Potencia de avance $$P_V = \frac{u(F_R + F_V)}{\eta_{mec} \cdot \eta_{eléc}}$$

r′21 Fuerza de avance $F_V \approx 0.2\ F_C$; (F_C según r′4)

r′22 Rozamiento (fricción) $F_R = m_b \cdot g \cdot \mu$

donde m_b es la masa de la pieza en movimiento; por ejemplo, en el caso de fresadoras, la suma de las masas de la pieza y de la mesa.

Hay que determinar si la potencia calculada con r′20 es suficiente para acelerar las partes móviles hasta la velocidad de movimiento rápido u_M, dentro de un tiempo dado t_b, (en las máquinas de producción $u_M \approx 0.2$ m/s). De esta manera, se explica lo siguiente.

r′23 $$P_V = u_M\, m_b \left(\mu\, g + \frac{u_M}{t_b}\right) \frac{1}{\eta_{mec} \cdot \eta_{eléc}}$$

Los símbolos se explican en R′5.

Explicación de la simbología
(R′1 a R′4)

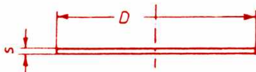
a : profundidad
b : ancho de viruta
b_w : ancho efectivo
desbastado $b_w = B_s/1.4$
alisado $b_w = B_s/3$
B : ancho de fresado
B_1, B_2 : ancho de fresado medido desde el centro de la herramienta
B_S : ancho del disco
d : diámetro del barreno
d_w : diámetro de la pieza, exterior o interior
D : diámetro de la herramienta
F_R : rozamiento (o fricción)
F_C : fuerza de corte
F_V : fuerza de avance
g : aceleración debida a la gravedad
h : grosor de la viruta
k : número de velocidades de salida
$k_{c1.1}$: fuerza de corte básica en relación con el área
K : factor de la operación (de maquinado)
l : recorrido de corte
l_1 : recorrido de la pieza
l' : sobrerrecorrido en uno u otro extremos con velocidad de avance u
z_s : número de filos o bordes cortantes por herramienta

l_K : distancia de grano efectiva, según la Tabla 2
M_c : momento de la fuerza de corte
n : velocidad de rotación (r/min)
n_1 : velocidad mínima de salida
n_2 : velocidad máxima de salida
P_C : potencia de corte
P_V : potencia de avance (alimentación)
s : avance
s_z : avance por filo
t_b : tiempo de aceleración
t_c : tiempo de corte
u : velocidad de avance
u_M : velocidad de avance alta (movimiento rápido)
ν : velocidad de corte
z_e : número de filos en acción
ϵ_s : relación de esbeltez (= a/s)
$\eta_{eléc}$: eficiencia eléctrica
η_{mec} : eficiencia mecánica
θ posición angular (ángulo de presentación)
μ : coeficiente de rozamiento (fricción)
σ : ángulo en la punta de la broca
ρ : razón progresiva
ϕ_s : ángulo de ataque (en fresado o rectificado)

HM : punta de carburo
HSS : punta de acero rápida

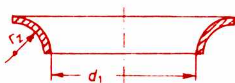
Labrado de lámina en frío – Embutido profundo

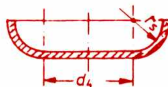
Diámetro inicial de la pieza base



r′24 $D = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \Sigma A_{mi}}$

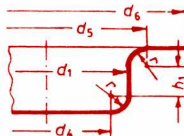
A_{mi} son las áreas superficiales de las piezas terminadas que pueden determinarse con las fórmulas de las secciones B y C (Parte I): b 30, c 12, c 16, c 21, c 25, c 27 y c 30. Las áreas según los radios de transición para las operaciones de embutido y estampado se calculan como sigue:





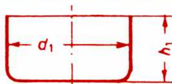
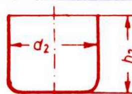
r′25 $A_m = \frac{\pi}{4}\left[2\pi d_1 r_z + 4(\pi - 2) r_z^2\right]$ | $A_m = \frac{\pi}{4}(2\pi d_4 + 8 r_s) r_s + \frac{\pi}{4} d_4^2$

Ejemplo (Considérese que $r_s = r_z = r$)



r′26 $D = \sqrt{d_4^2 + d_6^2 - d_5^2 + 4 d_1 h + 2\pi r (d_1 + d_4) + 4\pi r^2}$

Primera y segunda etapas

	1er. paso	2o. paso
		
r′27	$\beta_1 = \frac{D}{d_1}$	$\beta_2 = \frac{d_1}{d_2}$
r′28	$\beta_{1\,máx} = \beta_{100} + 0,1 - \left(\frac{d_1}{s} \cdot 0.001\right)$	$\beta_{2\,máx} = \beta_{100} + 0.1 - \left(\frac{d_2}{s} \cdot 0.001\right)$
r′29	$F_{z1} = \pi d_1 s k_{fm1} \varphi_1 \frac{1}{\eta_{F1}}$	$F_{z2} = \frac{F_{z1}}{2} + \pi d_2 s k_{fm2} \varphi_2 \frac{1}{\eta_{F2}}$
r′30	$\varphi_1 = \left\| \ln \sqrt{0.6 \beta_1^2 - 0.4} \right\|$	$\varphi_2 = \left\| \ln \sqrt{0.6 \beta_2^2 - 0.4} \right\|$
r′31 r′32 r′33	$k_{fm1} = \frac{w}{\varphi_1}$	Sin recocido intermedio: $k_{fm2} = \frac{k_{f1} + k_{f2}}{2}$; Con recocido intermedio: $k_{fm2} = \frac{w}{\varphi_2}$

(Continúa en R′7)

(Continuación de R′6)

El trabajo específico de deformación (referido a la unidad de volumen) y la resistencia (o esfuerzo) de fluencia k_f se obtiene a partir de las curvas de deformación para el valor apropiado de la relación de deformación logarítmica δ.

Fuerzas de sujeción de la pieza base F_{N1} y F_{N2}



1er. Paso	2o. paso
r′34 $F_{N1} = (D^2 - d_1^2)\frac{\pi}{4}\,\frac{R_m}{400}\left[(\beta_1 - 1)^2 + \frac{d_1}{s}\right]$	$F_{N2} = (d_1^2 - d_2^2)\frac{\pi}{4}\,\frac{R_m}{400}\left[(\beta_2 - 1)^2 + \frac{d_2}{s}\right]$



El **desgarre en el fondo** ocurre si

r′35 $$R_m = \frac{F_{Z1} + 0.1\ F_{N1}}{\pi\ d_1\ s} \qquad\qquad R_m = \frac{F_{Z2} + 0.1\ F_{N2}}{\pi\ d_2\ s}$$

r′36 **Condiciones máximas de embutido, β y R_m**

Material	β_{100}	Con recocido intermedio $\beta_{2\,máx}$	Sin recocido intermedio $\beta_{2\,máx}$	R_m N/mm²
Aceros:				
St 10	1.7	1.2	1.5	390
USt 12	1.8	1.2	1.6	360
USt 13	1.9	1.25	1.65	350
USt 14	2.0	1.3	1.7	340
St 37	1.7	–	–	410
Acero inox. (18% Cr, 9% Ni)	2.0	1.2	1.8	600
Al Mg Si (suave)	2.05	1.4	1.9	150

Explicación de la simbología (R′6, R′7)

A_{ml} : área de la superficie
F_{z1}, F_{z2} : fuerzas de embutición, 1er. y 2o. pasos.
k_{fm1} : resistencia de fluencia media, 1er. paso
k_{fm2} : resistencia de fluencia media, 2o. paso
K_{k1}, F_{f2} : resistencia de fluencia según δ_1 y δ_2
r : radio
r_s : radio del dado de estampado
r_z : radio del dado de embutido
w : trab. de deformación específico $= \dfrac{\text{trab. de deformación}}{\text{vol. del elem. deformado}}$
β_1, β_2 : relaciones de embutición, 1er. y 2o. pasos
β_{100} : máximas relaciones de embutición para s = 1 mm y d = 100 mm
$\beta_{1\,máx}$, $\beta_{2\,máx}$: máximas relaciones de embutición, 1er. y 2o. pasos
η_{F1}, η_{F2} : eficacias del proceso de deformación, 1er. y 2o. pasos.
δ_1, δ_2 : relaciones de deformación logarítmicas, 1er. y 2o. pasos

Extrusión (empuje de conformado en matriz)

r′37 Fuerza de extrusión $F = A \cdot k_{fm} \; \varphi_A \frac{1}{\eta_F}$

r′38 Trabajo de extrusión $W = V \cdot k_{fm} \; \varphi_A \frac{1}{\eta_F}$

r′39 Resistencia de fluencia media $k_{fm} = \frac{w}{\varphi_A}$

	Extrusión directa: Cuerpo sólido	Extrusión directa: Cuerpo hueco	Extrusión inversa
r′40	$A = \frac{\pi}{4} d_0^2$	$A = \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_1^2)$	$A = \frac{\pi}{4} d_0^2$
r′41	$\varphi_A = \ln \frac{d_0^2}{d_1^2}$	$\varphi_A = \ln \frac{d_0^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_1^2}$	$\varphi_A = \ln \frac{d_0^2}{d_0^2 - d_1^2}$
r′42	$V = \frac{\pi}{4} h_0 \cdot d_0^2$	$V = \frac{\pi}{4} h_0 (d_0^2 - d_1^2)$	$V = \frac{\pi}{4} d_0^2 \cdot h_0$
r′43	$\eta_F = 0.7 \ldots 0.8$	$\eta_F = 0.6 \ldots 0.7$	$\eta_F = 0.5 \ldots 0.6$

Relación de deformación logarítmica máxima $\delta_{A\,máx}$

Extrusión \ Material	Al99.5	AlMgSi suave	C<0.1%	C<0.15%	Aceros C>0.15%	baja aleación	aleación
directa	3.9	3.0	1.4	1.2	0.9	0.8	0.7
inversa	4.5	4.0	1.2	1.1	1.1	0.95	0.8

A : área utilizada
δ_A : relación de deformación logarítmica
η_F : eficacia del proceso de deformación
V : volumen del elemento deformado
w : trabajo de deformación específico (por unidad de volumen)
Δh : penetración (carrera del empujador)

Resolución de redes lineales

Generalidades: Existen métodos especiales que permiten el cálculo de tensiones y corrientes en una red eléctrica, de manera más fácil que por el análisis de nodos y mallas.

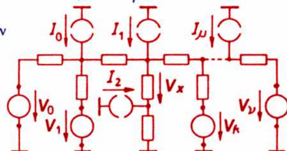
Teorema de superposición: En una red general se consideran aplicadas sucesivamente en aquélla todas las fuentes de tensión[1] y de corriente[2], y se determinan en cada caso las diferencias de potencial y las intensidades de corriente originadas por cada fuente actuando individualmente. Se cumplen las siguientes condiciones:

(a) Las fuentes de tensión restantes se ponen en cortocircuito.
(b) Las fuentes de corriente restantes se ponen en circuito abierto.

La solución final es la suma total de las soluciones parciales.
El procedimiento general para evaluar V_x en una red general con tensiones de fuente $V_0, \ldots, V_\nu$ y corrientes de fuentes $I_0, \ldots, I_\mu$.

s′1 $$V_x = a_0 \cdot V_0 + a_1 \cdot V_1 + \ldots + a_\nu \cdot V_\nu + b_0 \cdot I_0 + b_1 \cdot I_1 + \ldots + b_\mu \cdot I_\mu$$

s′2 $$= V_{xa0} + V_{xa1} + \ldots + V_{xa\nu} + V_{xb0} + V_{xb1} + \ldots + V_{xb\mu}$$

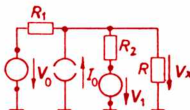


Cálculo de las soluciones parciales:

s′3 $V_x = V_{xaq}$ donde $V_0 \ldots V_\nu = 0$, con $V_q \neq 0$, y $I_0 \ldots I_\mu = 0$

s′4 $V_x = V_{xbq}$ donde $I_0 \ldots I_\mu = 0$, con $I_q \neq 0$, y $V_0 \ldots V_\nu = 0$

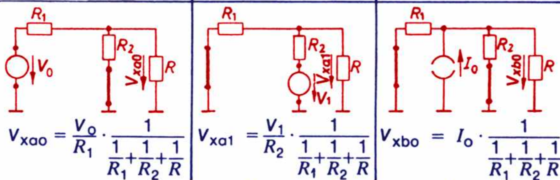
Ejemplo:



s′5 $$V_x = a_0 \cdot V_0 + a_1 V_1 + b_0 \cdot I_0 = V_{xa0} + V_{xa1} + V_{xb0}$$

Redes equivalentes para el cálculo de cada solución parcial:

s′6 | $V_0 \neq 0;\ V_1 = 0;\ I_0 = 0$ | $V_0 = 0;\ V_1 \neq 0;\ I_0 = 0$ | $V_0 = 0;\ V_1 = 0;\ I_0 \neq 0$ |
|---|---|---|



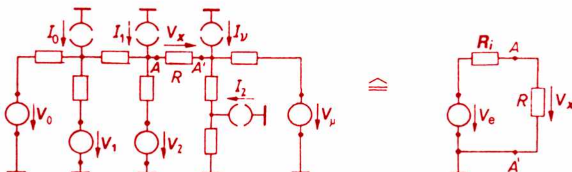
s′7 $$V_{xa0} = \frac{V_0}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R}} \qquad V_{xa1} = \frac{V_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R}} \qquad V_{xb0} = I_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R}}$$

s′8 Tensión requerida V_x (véase S′5) $$V_x = \left(\frac{V_0}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + I_0\right) \cdot \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R}$$

1), 2) Explicaciones en S′2

(continúa en S′2)

Teorema de Thévenin: Considérese una red general que contiene fuentes de tensión[1] y de corriente[2]. Se requiere calcular la tensión V_x en la resistencia R de la rama AA′. Para ello se reemplaza el resto de la red por una fuente de tensión equivalente V_e y el resistor R_i (de la resistencia interna).



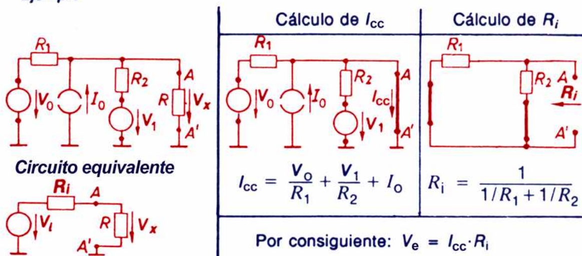
Para determinar V_e y R_i se elimina la rama AA′ en la red, y se le sustituye por el sistema formado por V_e y R_i en serie; R_i corresponde a la resistencia real entre A y A′, y V_e es la diferencia de potencial existente entre A y A′.

Si R_i se conoce, entonces $V_e = V_x$ se calcula por $V_e = R_i\, I_{cc}$, donde I_{cc} es la corriente de cortocircuito (cc) que fluye al unir A con A′.

Por tanto,

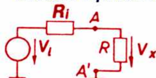
s′9 $$V_x = V_e \frac{R}{R+R_i} = I_{cc}\cdot R_i \frac{R}{R+R_i} = I_{cc} \frac{1}{1/R_i + 1/R}$$

Ejemplo



$$I_{cc} = \frac{V_0}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + I_0 \qquad R_i = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2}$$

Circuito equivalente



Por consiguiente: $V_e = I_{cc}\cdot R_i$

s′10 Por s′9: $$V_x = \left(\frac{V_0}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + I_0\right)\cdot\frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R};$$ Véase s′8 en S′1

Explicaciones:

$a_0 \ldots a_\nu$	coeficientes de las	tensiones	que se determinan mediante las resistencias de la red
$b_0 \ldots b_\nu$		corrientes	

[1] Tensión considerada	: Tensión de fuente	con resistencia interna	$R_i = 0$
[2] Corriente considerada	: Corriente de fuente		$R_i \to \infty$

Corriente Nominal I

Aislamiento de PVC, conductores de cobre no bajo tierra, con medio de protección contra sobrecarga a una temperatura ambiente de 30°C[1]

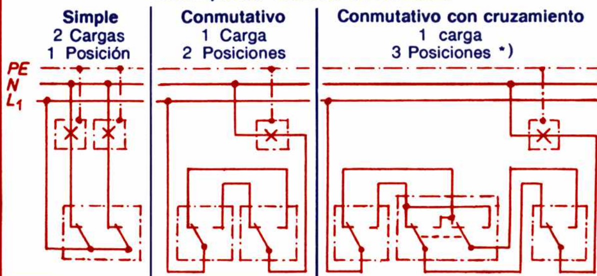
Area transversal nominal, mm^2		1	1.5	2.5	4	6	10	16	25	35	50
Grupo 1	I en A	11	15	20	25	33	45	61	83	103	132
	I_n en A	6	10	16	20	25	35	50	63	80	100
Grupo 2	I en A	15	18	26	34	44	61	82	108	135	168
	I_n en A	10	10[2]	20	25	35	50	63	80	100	125
Grupo 3	I en A	19	24	32	42	54	73	98	129	158	198
	I_n en A	20	20	25	35	50	63	80	100	125	160
Diám. nom. de alambre de Cu, mm. (aprox.)		1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.6	Cables			

Grupo 1: Uno o más conductores sencillos en tubo conduit
Grupo 2: Conductores múltiples (incluyendo los de cinta)
Grupo 3: Conductores sencillos en aire (al descubierto), con espaciamiento de por lo menos un diámetro

[1] El valor de I disminuye (o bien, aumenta) en 7% (aprox.) por cada incremento (o bien, decremento) de temperatura de 5°C. NOTA: No se debe exceder 50°C.

[2] En el caso de conductores con sólo dos hilos activos, se debe utilizar un dispositivo de protección contra sobrecarga, con I_n = 16 A.

Interruptores–Conexiones utilizadas



I_n : Corriente nominal para fusibles o interruptores automáticos (disyuntores)

I : Corriente nominal de conductor. También la corriente máxima permisible de dispositivos de protección contra sobrecarga (cuando $I_n \leq I$)

L_1 : Conductor de fase N: Conductor neutro PE: Puesta a tierra

*) Cada posición adicional requiere un cruzamiento extra.

Radiaciones

Definiciones y unidades

T′1

Radiación ionizante

Esta radiación es la consistente en partículas que produce la ionización directa o indirecta (excitación) de un gas (permanente).

	Cantidad total	Unidades	Intensidad en el tiempo	Unidades
t′1 t′2	Exposición (radiexposición)[1] $J = \frac{Q}{m}$	$1\,\frac{A\,s}{kg} = 1\,\frac{C}{kg}$ [1 roentgen = 1 R $1\,R = 258\,\frac{\mu C}{kg}$]	Intensidad de exposición $\dot{J} = \frac{J}{t} = \frac{I}{m}$	$1\,\frac{A}{kg}$ [$1\,\frac{R}{s} = 258\,\frac{\mu A}{kg}$ $1\,\frac{R}{a} = 8.2\,\frac{pA}{kg}$]
t′3 t′4	Absorción (radiabsorción) $D = f \cdot J$ $= \frac{W}{m}$	1 gray = 1 Gy $= 1\,\frac{V\,A\,s}{kg} = 1\,\frac{W\,s}{kg}$ $= 1\,\frac{J}{kg}$ [1 rad $= \frac{cJ}{kg} = 0.01$ Gy $= 6.242 \cdot 10^{16}\,\frac{eV}{kg}$]	Intensidad de absorción $\dot{D} = \frac{D}{t} = \frac{P}{m}$	$1\,\frac{Gy}{s} = 1\,\frac{W}{kg}$ $= 31.56 \cdot 10^{6}\,\frac{J}{kg\,a}$ [$1\,\frac{rad}{s} = 10\,\frac{mW}{kg}$ $= 0.01\,\frac{Gy}{s}$]
t′5 t′6	Absorción equivalente[2] $H = D_q = q \cdot D$ $= q \cdot f \cdot J$	1 sievert = 1 Sv $= 1\,\frac{V\,A\,s}{kg} = 1\,\frac{W\,s}{kg}$ $= 1\,\frac{J}{kg}$ [100 rem = 1 Sv]	Intensidad de absorción equivalente $\dot{H} = \dot{D}_q = \frac{D_q}{t}$ $= q \cdot \dot{D}$	$1\,\frac{W}{kg} = 1\,\frac{Gy}{s}$ [$1\,\frac{rem}{s} = 10\,\frac{mW}{kg}$ $1\,\frac{rem}{a} = 317\,\frac{pW}{kg}$]

Corriente de ionización I: Flujo de moléculas de aire ionizadas por radiación que se produce al aplicar una tensión eléctrica o voltaje (en una cámara de ionización).

Carga de ionización Q: Cuando circula una corriente de ionización I durante un tiempo t se manifiesta una carga total Q:

t′7 $$Q = I \cdot t$$

Las unidades destacadas entre corchetes [ ] son las de uso anterior.

[1] Valor medido [2] Valor teórico

(Continúa en T′2)

Radiaciones

Radiactividad

T′2

Energía de ionización W_i: Energía de radiación que produce la ionización. Cada par de iones en la molécula de aire requiere

t'8 $$W_{i(\text{aire})} = 33.7 \text{ eV}$$

t'9 (carga del electrón (e): $1 \text{ e} = 1.602 \times 10^{-19}$ C; 1 C = 1 A · s)

t'10 (electronvolt (eV): $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \times 1 \text{ V} = 1.602 \times 10^{-19}$ J)

Radiabsorción D: Es la energía absorbida (dosis de radiación) por unidad de masa. (La radiexposición J está referida también a la masa: $J = Q/m$.)

t'11 **RADIACTIVIDAD. Actividad A:** Número de átomos de una sustancia radiactiva que se desintegran por unidad de tiempo:

$$A = -dN/dt = \lambda \cdot N$$

Unidades: becquerel (Bq). Corresponde a una actividad de 1 átomo por segundo [curie (Ci): $1 \text{ Ci} = 37 \times 10^9$ Bq]

t'12 **Constante de actividad (o declinación) λ:**

$$\lambda = \ell n\, 2/T_{1/2}$$

t'13 **Semivida** (o "vida media") $T_{1/2}$: Tiempo en el que una actividad dada se reduce o declina hasta la mitad. Unidades: s^{-1}, min^{-1}, h^{-1}, d^{-1}, a^{-1}.

Semividas de algunos isótopos naturales y artificiales

Número atómico[1]	Elemento	Número de masa[2]	Semivida	Número atómico[1]	Elemento	Número de masa[2]	Semivida
1	Tritio	3	12 a	55	Cesio	134	2.1 a
19	Potasio	40	$1.3 \cdot 10^9$ a	55	Cesio	137	30 a
19	Potasio	42	12.4 h	88	Radio	226	1600 a
27	Cobalto	60	5.3 a	90	Torio	232	$14 \cdot 10^9$ a
38	Estroncio	90	29 a	92	Uranio	238	$4.5 \cdot 10^9$ a
53	Yodo	131	8.0 d	94	Plutonio	239	24 000 a

Explicación de los símbolos

m : masa (cantidad base)

N : cantidad de sustancia radiactiva (núm. de átomos)

t'14 q : factor de calidad para radiaciones $\beta-$, γ, X — $q = 1$

t'15 para otras radiaciones — $q = 1 \ldots 20$

t'16 f : constante de ionización para los tejidos — $f = f_{aire}$

t'17 para los huesos — $f = (f \ldots 4)\, f_{aire}$

t'18 f_{aire} : constante de ionización para el aire $f_{aire} = W_{aire}/e = 33.7$ V)

Símbolos de las unidades

t'19 A: ampere | C: coulomb | J: joule | a: año (1 a = $31.56 \cdot 10^6$ s)

Absorción equivalente – Observación: En el año de 1982, la persona media en Alemania (R. Fed.) tuvo los siguientes valores de exposición equivalente a la radiación:

Tipo	H en mSv	H en [mrem]
De origen natural	1.1	110
Por razones médicas	0.5	50
Por causas diversas	< 0.1	< 10
Valor límite permitido por la ley	≤ 0.3	≤ 30

1) Núm. protónico (Z) | 2) Núm. nucleónico (de protones + neutrones) (A)

CONTROL

El control es un proceso mediante el cual se registra una cantidad llamada variable controlada (la cantidad que se debe controlar). Entonces, esta variable controlada se compara con otra cantidad, la variable de referencia. A continuación la variable controlada es afectada de tal manera que sea igual a la variable de referencia. La característica principal del control es el circuito de acción cerrado, en el que la variable controlada influye continuamente sobre sí misma (ver más adelante el diagrama de flujo de control).

Nota preliminar:
Los nombres y definiciones de los términos siguientes se apegan a los de la norma DIN 1926, versión 2/1994.

Funciones, cantidades y símbolos que describen el comportamiento de los elementos y sistemas de transferencia

Variable de entrada u

La variable de entrada u es una cantidad que actúa sobre el sistema considerado sin ser influida por él.

Variable de salida v

Es una cantidad de un sistema que sólo puede ser influida por ella misma o por sus variables de entrada.

Tiempo de retraso T, constante de tiempo T

El elemento P-T_1, que es el elemento de retraso de primer orden, es una unidad funcional que presenta el comportamiento de transferencia:

u'1 $$v(t) + T\dot{v}(t) = K_p\, u(t)$$

donde T es el tiempo de retraso, que también se llama constante de tiempo. (Ver la solución de esta ecuación diferencial en D'4, D' 9.)

Frecuencia angular característica ω_0, razón de amortiguamiento ϑ

El elemento P-T_2, que es el elemento de retraso de segundo orden, es una unidad funcional que presenta el comportamiento de transferencia:

u'2 $$v(t) + (2\vartheta/\omega_0)\,\dot{v}(t) + (1/\omega_0)^2\,\ddot{v}(t) = K_P\, u(t)$$

En este caso ω_0 es la frecuencia angular característica y ϑ es la relación de amortiguamiento. (Ver la solución de esta ecuación diferencial en D' 5, D'11).

Frecuencia angular propia ω_d

La frecuencia angular propia, o eigenfrecuencia angular ω_d se define con la siguiente fórmula, en la que intervienen la frecuencia angular característica ω_0 y la relación de amortiguamiento ϑ.

u'3 $$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}$$

Ver explicación de los símbolos en U'35

Ingeniería de control

Terminología de ingeniería de control

Respuesta escalón

La respuesta escalón es la variación, respecto al tiempo, de la variable de salida de un elemento de transferencia, cuando la variable de entrada es una función escalón (ver figura 1)

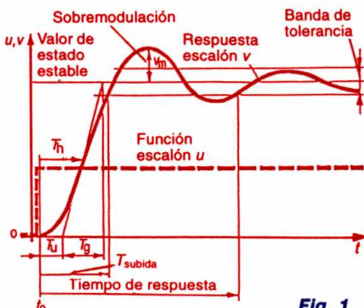


Fig. 1

Respuesta escalón de un elemento de transferencia

Tiempo muerto equivalente T_u

El tiempo muerto equivalente, T_u, se define como el tiempo transcurrido entre t_0 y el punto de intersección de la primera inflexión de la respuesta escalón con el eje *x* (ver la figura 1).

Tiempo de transición T_g

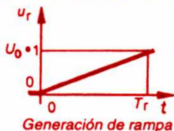
El tiempo de transición, T_g, se define como el tiempo que transcurre entre el punto de intersección de la primera inflexión de la respuesta escalón con el eje x, y el punto donde esta primera inflexión alcanza el valor de estado estable.

Sobrepaso v_m

Es la máxima desviación de la respuesta escalón respecto del valor de estado estable.

Respuesta rampa

La respuesta rampa es el desarrollo, en el tiempo, de la variable de salida cuando una función rampa, con determinada rapidez de cambio, se usa como variable de entrada (generación de rampa).



Generación de rampa

Fig. 2

$$u_r(t) = \frac{U_0}{T_r} r(t)$$ u'4

$$= \frac{U_0}{T_r} \int_0^t \varepsilon(t)\, dt = \frac{U_0}{T_r} t\, \varepsilon(t)$$ u'5

T_r es el tiempo de rampa, $\varepsilon(t)$ es la generación de escalón unitario:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \text{ cuando } t < 0 \\ 1 \text{ cuando } t \geq 0 \end{cases}$$ u'6

Respuesta escalón unitario

Una respuesta escalón relacionada con la amplitud escalón de la variable de entrada origina la respuesta escalón **relacionada**, llamada respuesta escalón unitario $h(t)$.

(Continúa en U'3)

$h(t)$ caracteriza el comportamiento dinámico del elemento de transferencia. Ver las respuestas escalón unitario de los elementos más importantes de transferencia en U'14 a U'17.

Función de transferencia $F(s)$

Es la relación entre la transformada de Laplace $v(s)$ de la variable de salida, y la transformada de Laplace $u(s)$ de la variable de entrada de un elemento de transferencia. Ver las funciones de transferencia de los elementos de transferencia más importantes, en U'14 a U'17.

Respuesta en frecuencia $F(j\omega)$

Es la razón de los valores de las variables senoidales de salida y las de entrada del elemento de transferencia en su comportamiento periódico estable, en función de ω o de f.

Amplitud de la respuesta $F(j\omega)$

Es la magnitud de la respuesta en frecuencia, $F(j\omega)$, en función de la frecuencia angular ω.

Fase de la respuesta arco $F(j\omega)$

Es el arco del argumento $F(j\omega)$ de la respuesta en frecuencia $F(j\omega)$ en función de la frecuencia angular ω.

Características de respuesta en frecuencia, diagrama de Bode

Las características de la respuesta en frecuencia (diagrama de Bode) se obtienen cuando el valor absoluto (logarítmico o en dB) y la respuesta en fase (proporcional) se grafican juntas en función de ω o de la frecuencia angular normalizada ω/ω_1.

Frecuencia angular de vértice ω_n

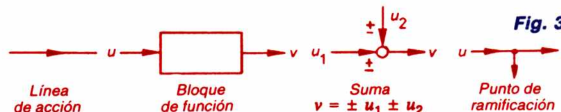
La frecuencia angular de vértice ω_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) es la frecuencia angular ω en la que la asíntota del valor absoluto en el diagrama de Bode cambia de dirección (hacia arriba o hacia abajo) en un múltiplo entero de 20 dB por década.

El diagrama de control

Este diagrama es la ilustración simbólica de todas las operaciones en un sistema determinado.

Elementos del diagrama de control

Estos elementos son la línea de acción, el bloque de función, la suma y el punto de ramificación.



u, u_1, u_2: estímulos de entrada v : resultado de salida

U′4 Ingeniería de control

Terminología de la ingeniería de control

Estructuras básicas del diagrama de control

Las estructuras básicas de este diagrama son las estructuras en serie, en paralelo y circulares.

Regla para sumar en un diagrama de control

Una suma tiene una sola línea de acción que sale (variable de salida).

Reglas para representar un sistema mediante un diagrama de control

Cada ecuación del sistema sólo aparece una vez en el diagrama.

Una negación (cambio de signo, inversión de polaridad) debe indicarse en un punto de suma existente o adicional. No es válido esconderla en el coeficiente de un bloque.

En el diagrama de acción de un sistema pasivo no hay retroalimentación positiva.

Para tener una idea clara del aspecto final de un diagrama de control, el camino más corto (hacia adelante) entre la variable de entrada (lado superior izquierdo) y la variable de salida (lado superior derecho) debe ser una recta horizontal.

Deben evitarse los elementos derivados. Para lograrlo, deben reordenarse las ecuaciones del circuito cerrado.

Componentes del circuito de control y sus cantidades

La figura 4 muestra un diagrama de control típico de un sistema de control de circuito cerrado, incluyendo sus unidades funcionales.

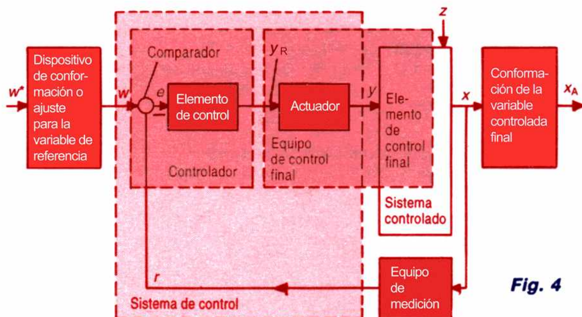


Diagrama de acción característico de un sistema de control de circuito cerrado

Sistema controlado

Es aquella parte del circuito cerrado de control sobre la cual se va a influir.

Punto de medición de la variable controlada; variable controlada x

El punto de medición de la variable controlada es el lugar, en el sistema controlado, donde se obtiene el valor de esa variable (figura 4). La variable controlada x es la variable del sistema controlado que se registra para su control, y que se integra al sistema de control a través del equipo de medición. x es la variable de salida del sistema controlado y la variable de entrada del equipo de medición.

Formación de la variable controlada final; variable controlada final x_A

La variable controlada final, x_A, es una cantidad sobre la que el circuito cerrado de control debe influir. Cuando es fácil de obtener por medición, x_A es idéntica a la variable controlada x y se retroalimenta al elemento de comparación a través del equipo de medición. Sólo cuando no es posible obtener x_A, o sólo es posible con grandes dificultades, ésta existirá como cantidad independiente además de la variable controlada x.

En la figura 4 (el diagrama de flujo característico de un sistema de control de circuito cerrado), la formación de la variable controlada final x_A se hace con la variable controlada x, por lo general agregándola al sistema controlado. En este caso, la variable controlada final aparece fuera del circuito de control, y no es posible controlar las variables perturbantes que influyen durante la formación.

Ejemplo:	Variable final controlada:	Temperatura del contenido de un recipiente.
	Variable controlada:	Temperatura de la parrilla.

La variable controlada final, x_A, también puede encontrarse dentro del sistema controlado, esto es, dentro del circuito cerrado de control. En este caso, la variable controlada se forma a través de la variable controlada final; las variables perturbadoras que influyen se pueden controlar.

Ejemplo:	Variable controlada final:	Relación de mezcla de dos líquidos.
	Variable controlada:	Resistencia específica.

Equipo de medición, variable r retroalimentada

El equipo de medición es la suma total de los elementos funcionales para registrar, transferir, adaptar y distribuir las variables (ver figura 4). La variable retroalimentada r es la que resulta de la medición de la variable controlada x.

Ajustador de variable de referencia, variable de referencia w

El ajustador de variable de referencia es una unidad funcional que produce una variable de referencia w que se deriva de una variable objetivo w^*, definida por el usuario (ver figura 4).

La variable de referencia w no está influida por el circuito cerrado de control con el que se relaciona; la variable de salida del circuito cerrado de control debe seguir a la variable de referencia con la dependencia especificada.

Nota: Con mucha frecuencia, el objetivo y la variable de referencia son idénticos.

Dispositivo de conformación de la variable de referencia; variable objetivo w^*

El dispositivo de conformación de la variable de referencia produce, a partir de una variable objetivo w^* –aplicada a la entrada– una variable de referencia w de salida. Este proceso de conformación asegura que la variable de referencia w, o sus derivadas respecto al tiempo, no rebasarán los valores críticos (ver figura 4). La variable objetivo w^* se define externamente y no está influida por el sistema de circuito cerrado que se tiene en consideración; la variable controlada final w del sistema de circuito cerrado debe seguir, con la dependencia especificada, a la variable objetivo.

Comparador, variable de error e

El comparador produce la variable de error e en función de la variable de referencia w y la variable retroalimentada r (ver figura 4).

$$e = w - r.$$ u'8

Elemento de control, controlador, variable de salida y_R del controlador

El elemento de control, o elemento controlador, produce la variable de salida y_R del controlador utilizando la variable de error e del comparador. El proceso asegura que la variable controlada x del circuito de control siga a la variable de referencia w tan rápida y precisamente como sea posible, aun cuando haya variables perturbadoras presentes. El controlador está formado por el comparador y el elemento de control (ver figura 4).

Actuador

Es una unidad funcional que usa la variable de salida del controlador, y_R, para formar y. La variable y es necesaria para modular el elemento de control final (ver figura 4).

Elemento de control final, variable reguladora y

El elemento de control final está en la entrada del sistema controlado e influye sobre el flujo de energía. Su variable de entrada es la variable reguladora y (ver figura 4). Esta señal transmite el resultado de control del sistema al sistema controlado.

Equipo de control final

El equipo de control final está formado por el actuador y el elemento de control final.

Sistema de control

Es aquella parte del diagrama de control que debe influir sobre el sistema controlado, a través del elemento de control final.

Punto de regulación

Es el punto de aplicación de la variable reguladora y.

Punto de perturbación, variable de perturbación z

Es el punto donde la variable de perturbación z, aplicada externamente, ejerce la influencia que se pretende en el control de circuito cerrado (ver figura 4).

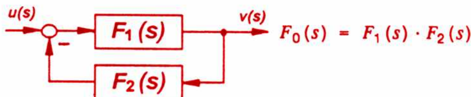
Cantidades y funciones que describen el comportamiento dinámico de circuitos de control

Función de transferencia de circuito abierto $F_0(s)$

Es el producto de todas las funciones de transferencia en serie de un circuito o un circuito de control.

Ejemplo:

u'9



Ganancia de circuito abierto V_0

Es el valor de la función de transferencia de circuito abierto, $F_0(s)$, cuando la variable de Laplace es $s = 0$. Este término sólo se aplica a circuitos y circuitos de control **sin** comportamiento I. Mientras mayor sea la ganancia de circuito abierto, más preciso será el control de circuito cerrado.

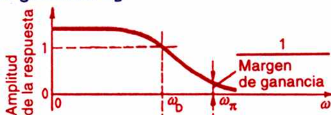
Factor de control $R_F(0)$

Este factor se define por la ecuación

u'10 $$R_F(0) = 1/(1 + V_0)$$

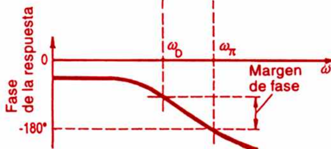
Frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D

Es la frecuencia, de circuito abierto, en la que el valor absoluto (amplitud) del circuito de control abierto es igual a 1.



Frecuencia angular de cruce de fase ω_π

Es la frecuencia de circuito abierto que existe cuando la fase de la respuesta del circuito de control abierto es $-180°$.



ω_D: Frecuencia angular de cruce de ganancia

ω_π: Frecuencia angular de cruce de fase

Fig. 5

Diagrama de valor absoluto y fase de la respuesta (no logarítmica) de un circuito de control abierto

Margen de fase δ

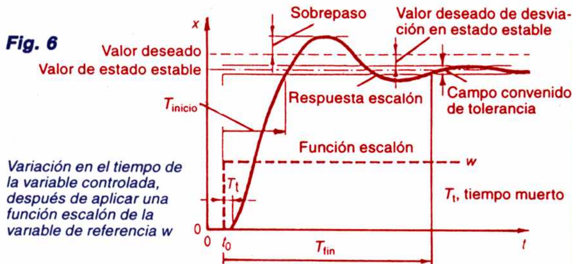
Es la diferencia angular entre la fase de la respuesta del circuito de control abierto, en la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D, y $-180°$. El cambio de signo necesario en el circuito de control no se toma en cuenta.

Margen de ganancia ε

Es el recíproco del valor absoluto (amplitud) del circuito de control abierto en la frecuencia angular de cruce de fase ω_π.

Tiempo para alcanzar la tolerancia inferior, T_{inicio}

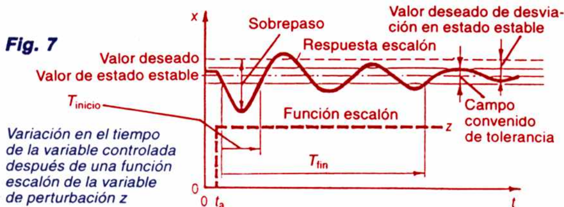
Es el intervalo de tiempo que comienza cuando el valor de la variable controlada x – después de aplicar una función escalón de la variable de referencia w, o una función escalón de la variable de perturbación z – sale de determinado campo de tolerancia de la variable controlada, y termina cuando entra por primera vez a este campo (ver figuras 6 y 7).



Una función escalón de la variable de referencia también produce un escalón en el campo de tolerancia de la variable controlada.

Sobrepaso x_m de la variable controlada

El sobrepaso x_m de la variable controlada x es la desviación máxima (momentánea) respecto al valor deseado durante la transición de un estado estable a otro, al aplicar una función escalón de la variable de referencia w o de una variable de perturbación z (ver figura 7).



Tiempo para alcanzar el estado estable, T_{fin}

T_{fin} es el tiempo que comienza cuando el valor de la variable controlada x – después de aplicar una función escalón de la variable de referencia w, o de la variable de perturbación z – sale de determinado campo de tolerancia de la variable controlada, y termina cuando entra en ese campo permanentemente (ver figuras 6 y 7).

REGLAS PARA DETERMINAR LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL CIRCUITO DE CONTROL TOTAL

La función de transferencia completa se forma usando cada elemento de transferencia individual.

Combinación en serie

u'11 $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

Combinación en paralelo

u'12 $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$

Regla de retroalimentación

u'13 $F(s) = \dfrac{F_1(s)}{1 + F_1(s) \cdot F_2(s)}$

Nota: El signo del denominador de $F(s)$ es el contrario del signo en el punto de suma del diagrama de control.
Un signo "+" en el punto de suma indica retroalimentación **positiva**
Un signo "-" en el punto de suma indica retroalimentación **negativa**

Si $F_1(s)$ y/o $F_2(s)$ contienen cambios de signo, entonces habrá retroalimentación negativa (positiva) cuando la cantidad de cambios de signo en todo el circuito sea impar (par).

Caso especial: $F_2(s) = 1$ (retroalimentación directa).

u'14 $F(s) = \dfrac{F_1(s)}{1 + F_1(s)}$

Regla ampliada de retroalimentación

Si no hay puntos de suma entre las ramas de un diagrama de control, la función de transferencia se puede determinar con facilidad mediante la siguiente fórmula:

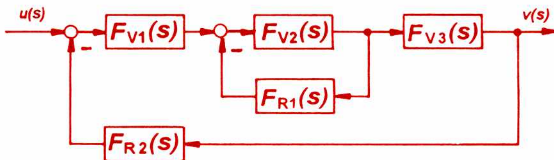
u'15 $$F_{res}(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{F_{V\,res}(s)}{1 + \sum_{i=1}^{n} F_{0i}(s)} \quad \text{donde} \quad F_{V\,res}(s) = \prod_{k=1}^{m} F_{Vk}$$

$F_{0i}(s)$ indica la función de transferencia $F_{res}(s)$ del circuito o circuitos únicos de control en el diagrama aplicado de control; téngase en cuenta que en circuitos de retroalimentación positiva, F_{0i} se escribe con signo **negativo** en la suma del denominador de F_{res}.

u'16 $F_{V\,res}(s) = \prod_{k=1}^{m} F_{Vk}$ es el producto de todas las funciones de transferencia de los elementos de transferencia que están en la **trayectoria más directa.**

El traslape de las líneas de acción no afecta la aplicación de la regla ampliada de retroalimentación.

Ejemplo:



u'17 $$F_{res}(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{F_{V1}(s) \cdot F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s)}{1 + F_{V2}(s) \cdot F_{R1}(s) + F_{V1}(s) \cdot F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s) \cdot F_{R2}(s)}$$

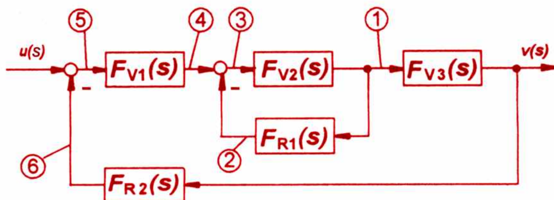
Determinación de la función de transferencia con el método de anotación hacia atrás

Para usar este método se comienza en la salida $v(s)$ y se sigue el diagrama de control en la dirección de la variable de entrada o del punto B de suma de referencia. Se determina y se anota la transformada de Laplace de cada función de tiempo correspondiente antes y después de cada elemento de transferencia. Por último, en el punto B de suma de referencia se puede determinar la función de transferencia $F_{res}(s)$ usando la transformada de Laplace que se conoce en este sitio.

Ejemplo:

Para describir el método de anotación hacia atrás se determinan las transformadas de Laplace de las respectivas funciones de tiempo en los puntos 1 a 6 del ejemplo siguiente:

u'18 $$x_{④}(s) = x_{③}(s) + x_{②}(s) = \left[\frac{1}{F_{V2} \cdot F_{V3}} + \frac{F_{V1}}{F_{V3}}\right] \cdot v(s); \quad x_{③}(s) = \frac{1}{F_{V2} \cdot F_{V3}} \cdot v(s)$$



u'19 $$x_{⑥}(s) = F_{R2} \cdot v(s) \qquad x_{②}(s) = \frac{F_{R1}}{F_{V3}} \cdot v(s)$$

u'20 $$x_{⑤}(s) = \frac{x_{④}(s)}{F_{V1}} = \frac{1}{F_{V1}(s)} \left[\frac{1}{F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s)} + \frac{F_{R1}(s)}{F_{V3}(s)}\right] \cdot v(s)$$

En el punto B de suma de referencia se tiene la siguiente relación:

u'21 $u(s) - x_{⑥}(s) = x_{⑤}(s)$; para $x_{⑥}(s)$ y $x_{⑤}(s)$ usar los valores que se obtuvieron anteriormente:

u'22 $$u(s) - F_{R2} \cdot v(s) = \frac{1}{F_{V1}(s)} \left[\frac{1}{F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s)} + \frac{F_{R1}(s)}{F_{V3}(s)}\right] \cdot v(s)$$

La solución $F_{res}(s)$ de esta ecuación es la misma que se determinó en u'17:

u'23 $$F_{res}(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{F_{V1}(s) \cdot F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s)}{1 + F_{V2}(s) \cdot F_{R1}(s) + F_{V1}(s) \cdot F_{V2}(s) \cdot F_{V3}(s) \cdot F_{R2}(s)}$$

Reglas para la forma normalizada de la función de transferencia $F(s)$

Si se usa la forma normalizada de la función de transferencia, se podrán ver **con facilidad** el **tipo y las características** del elemento de transferencia. Para transformar una función de transferencia en su forma nor-

malizada, son necesarios un desarrollo bien fundado y la eliminación y combinación de paréntesis para asegurar que el **numerador y denominador** de la función de transferencia sean **polinomios de la variable de Laplace** s, o productos de polinomios de s en los que:

a) **no haya potencias negativas** de s (es decir, que ni el numerador ni el denominador de la función de transferencia puedan contener una fracción en la que el denominador contenga s).
b) **la potencia mínima de s tenga coeficiente 1**, y
c) no haya factor común del polinomio.

Ejemplo:

u′24
$$F_1(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = a_0 \frac{(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots)(1 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots)(\ldots)}{(1 + b_1 s + b_2 s_2 + \ldots)(1 + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots)(\ldots)}$$

Excepción: Si se encuentra un factor PI o PID, otra forma en la que se conserva este factor [$1/(T_n s) + 1$ en el ejemplo] es una forma normalizada aceptable.

Ejemplo:

u′25
$$F_2(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = K_P \frac{1/(T_n s) + 1}{1 + Ts} = \frac{K_P}{T_n s} \cdot \frac{1 + T_n s}{1 + Ts}$$

A partir de la tabla de los elementos de transferencia más importantes, se puede determinar el siguiente tipo para esta ecuación: (PI) – $T_1 \rightarrow$ I – (PD) – T_1.

La siguiente tabla muestra distintos tipos de forma normalizada:

Tipo de forma normalizada	Representación	Aplicación
Producto de forma normalizada	Denominador y numerador están en forma factorizada	Diagrama de Bode y estabilización en serie de circuitos de control
Suma de forma normalizada	Denominador y numerador están expresados como suma	Criterio de Hurwitz
Mezcla de forma normalizada	Denominador dividido en factores, hasta donde sea posible. Numerador en forma de suma	Determinación de las respuestas escalón y rampa

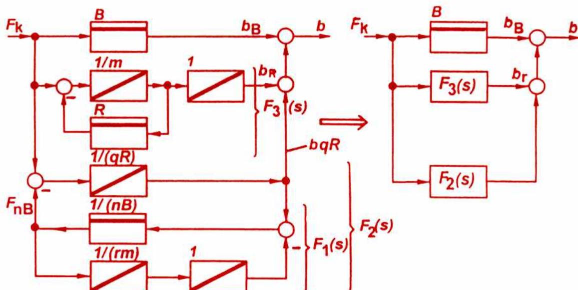
La forma normalizada de producto tiene precedencia sobre las demás representaciones, ya que éstas se pueden determinar multiplicando los factores individuales de la forma normalizada del producto. Para que sea posible hacer reducciones posteriores, se debe posponer lo más posible la multiplicación de los términos entre paréntesis, si es que acaso se multiplican.

Ejemplo de la determinación de la forma normalizada de una función de transferencia

Se debe determinar la relación:

u′26 $$F(s) = b(s) / F_k(s)$$

para el siguiente diagrama de control



Paso a paso se determinan:

u′27 $$F_1(s) = F_{nB}(s) / b_{qR}(s)$$

u′28 $$F_2(s) = b_{qR}(s) / F_k(s)$$

u′29 y $$F_3(s) = b_R(s) / F_k(s)$$

u′30 entonces $$F(s) = B + F_2(s) + F_3(s)$$

u′31 $$F_1(s) = \frac{F_{nB}(s)}{b_{qR}(s)} = \frac{1/(nB)}{1 + 1/(nB) \cdot 1/(rms^2)} = \frac{rms^2}{1 + nrmBs^2}$$

u′32 $$F_2(s) = \frac{b_{qR}(s)}{F_k(s)} = \frac{1/(qRs)}{1 + \frac{1}{qRs} F_1(s)} = \frac{1}{qRs + F_1(s)} = \frac{1}{qRs + \frac{rms^2}{1 + nrmBs^2}}$$

u′33 $$= \frac{1 + nrmBs^2}{qRs\left[1 + nrmBs^2 + rms/(qR)\right]}$$

u′34 $$F_3(s) = \frac{b_R(s)}{F_k(s)} = \frac{1/(ms)}{1 + R/(ms)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{Rs\left[1 + ms/R\right]}$$

u′35 $$F(s) = B + \frac{1}{Rs\left[1 + ms/R\right]} + \frac{1 + nrmBs^2}{qRs \cdot \left[1 + rms/(qR) + nrmBs^2\right]}$$

Esta descripción de $F(s)$ muestra que el sistema que conduce a este diagrama de control es una combinación en paralelo, formada a partir de un elemento P (B), un elemento I – T_1 (primera fracción) y un elemento I – (PD) – T_2 (segunda fracción).

U'14 Ingeniería de control

Elementos primitivos de transferencia
Elemento de retraso de primer orden

Identificador / Símb. en el diagrama de ctrol.	Ecuación en el dominio del tiempo	Ejemplos de estructura
P K_P, u, v	$v = K_P \cdot u$	K_P, u, v Elemento proporcional
I K_I, u, v	$v = K_I \int u \, dt$ $= K_I \int_0^t u \, dt + v(0)$ $\dot{v} = K_I \cdot u$	K_I, u, v Elemento integral
D K_D, u, v	$v = K_D \cdot \dot{u}$ $\int v \, dt = K_D \cdot u$	K_D, u, v Elemento derivativo
T_t 1, T_t, u, v	$v(t) = u(t - T_t)$	1, T_t, u, v Elemento de tiempo muerto
$P - T_1$ K_P, T, u, v	$v + T\,\dot{v} = K_P \cdot u$	K_P, $1/T$, u, v, – Elemento P–T_1

u'36 a u'43

Ver la explicación de los símbolos en U'35

Ingeniería de control

Elementos primitivos de transferencia
Elemento de retraso de primer orden

Función de transferencia $F(s)$ =	Respuesta escalón unitario, ecuación $h(t)$ = / diagrama
K_P	K_P
$K_I \frac{1}{s}$ ([h] = Unidad de h)	$K_I \cdot t$
$K_D \cdot s$	$K_D \cdot \delta(t)$
$e^{-T_t s}$	0 para $t < T_t$; 1 para $t > T_t$
$\frac{K_P}{1 + T \cdot s}$	$K_P (1 - e^{-t/T})$

u'44 a u'53

Ver la explicación de los símbolos en U'35

U′15 Ingeniería de control

Elemento de retraso de segundo orden
Elemento PI de combinación en paralelo

Identificador / Símb. en el diagrama de ctrol.	Ecuación en el dominio del tiempo		Ejemplos de estructura
P – T_2 K_P ϑ, ω_0 u v	$v + 2\frac{\vartheta}{\omega_0}\,\dot{v} + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 \ddot{v} =$ $= K_P \cdot u$	$\vartheta < 1$	u K_P ω_0 ω_0 v 2ϑ
P – T_2 K_P ϑ, ω_0 u v		$\vartheta > 1$	u K_P T_1 1 T_2 v u K_P $1/T_1$ $1/T_2$ v
PI K_P T_n u v	$v = K_I \int u \, dt + K_P \cdot u$ $= K_P \left(\frac{1}{T_n} \int u \, dt + u \right)$ donde $T_n = K_P / K_I$		u K_I K_P v u K_P $1/T_n$ v u K_P/T_n 1 T_n v

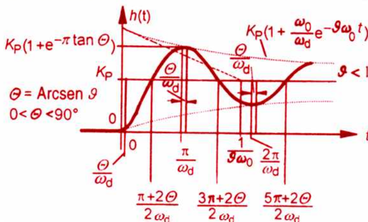
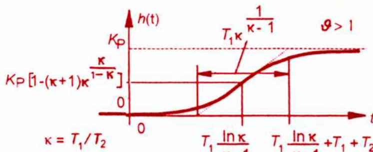
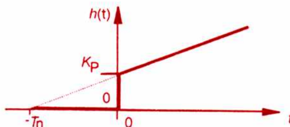
u′54 a u′58

Ingeniería de control

Elemento de retraso de segundo orden
Elemento PI de combinación en paralelo

U'15

u'59 a u'68

Función de transferencia $F(s) =$	Respuesta escalón unitario, ecuación $h(t) =$ / diagrama
$$\frac{K_P}{1 + 2\frac{\vartheta}{\omega_o}s + \left(\frac{1}{\omega_o}\right)^2 \cdot s^2}$$ $0 < \vartheta < \infty$	$K_P\left[1 - \frac{\omega_o}{\omega_d}e^{-\vartheta\omega_o t} \cdot \cos(\omega_d t - \Theta)\right]$; $\omega_d = \omega_o\sqrt{1-\vartheta^2}$ $\Theta =$ Arcsen ϑ $0 < \Theta < 90°$ 
$$\frac{K_P}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$ $T_{1,2} = \frac{1}{\omega_o}(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$ $\vartheta > 1$	$K_P\left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]$ 
$K_I\frac{1}{s} + K_P$ $K_P\left[\frac{1}{T_n \cdot s} + 1\right]$ $\frac{K_P}{T_n \cdot s}(1 + T_n \cdot s)$	$K_I t + K_P = K_P(1 + \frac{t}{T_n})$ 

U'16 Ingeniería de control

Elementos PD, PID de combinación en paralelo
Elementos I-T1 y D-T1 de combinación en serie

Identificador / Símb. en el diagrama de ctrol.	Ecuación en el dominio del tiempo	Ejemplos de estructura
PD	$v = K_P \cdot u + K_D \cdot \dot{u}$ $= K_P (u + T_v \cdot \dot{u})$ $T_v = \frac{K_D}{K_P}$	
PID	$v = K_I \int u \, dt + K_P \cdot u + K_D \cdot \dot{u}$ $= K_P \left[\frac{1}{T_n} \int u \, dt + u + T_v \cdot \dot{u} \right]$ $T_n = \frac{K_P}{K_I}$; $T_v = \frac{K_D}{K_P}$	$T_n \geq 4 T_v$
I – T_1	$v + T \dot{v} = K_I \int u \, dt$	
D – T_1	$v + T \dot{v} = K_D \cdot \dot{u}$	

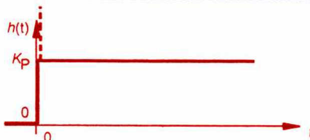
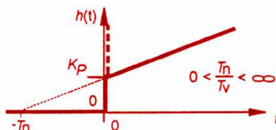
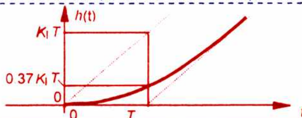
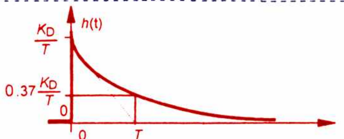
u'69 a u'76

Ver la explicación de los símbolos en U'25

Ingeniería de control

Elementos PD, PID de combinación en paralelo
Elementos I-T_1 y D-T_1 de combinación en serie

u′77 a u′93

Función de transferencia $F(s)$ =	Respuesta escalón unitario, ecuación $h(t)$ = / diagrama
$K_P + K_D \cdot s$ $K_P\,(1 + T_v \cdot s)$	$K_P + K_D\,\delta(t)$ 
$K_I \frac{1}{s} + K_P + K_D \cdot s$ $K_P \left[\frac{1}{T_n \cdot s} + 1 + T_v \cdot s\right]$ $0 < \frac{T_n}{T_v} < \infty$ $K_{Pk}\,(\frac{1}{T_{nk} \cdot s} + 1)\,(1 + T_{vk} \cdot s)$ $\frac{K_I}{s}\,(1 + T_{nk} \cdot s)\,(1 + T_{vk} \cdot s)$ $T_{nk} = \frac{1}{2} T_n\,(1 + \sqrt{1 - 4\,T_v / T_n})$ $T_{vk} = \frac{1}{2} T_n\,(1 - \sqrt{1 - 4\,T_v / T_n})$ $K_{Pk} = K_I \cdot T_{nk}$	$K_I\,t + K_P + K_D\,\delta(t) = K_P \left[\frac{t}{T_n} + 1 + T_v\,\delta(t)\right]$ para $0 < \frac{T_n}{T_v} < \infty$; $K_I \left[t + T_{nk} + T_{vk} + T_{nk} \cdot T_{vk}\,\delta(t)\right]$ 
$\frac{K_I}{s\,(1 + T \cdot s)}$	$K_I\,(t - T + T \cdot e^{-t/T})$ 
$\frac{K_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$	$K_D\,(1/T)\,e^{-t/T}$ 

U'17 Ingeniería de control

Elemento de combinación en serie
Elementos (PD)-T_1 y (PID)-T_1 de combinación en grupo

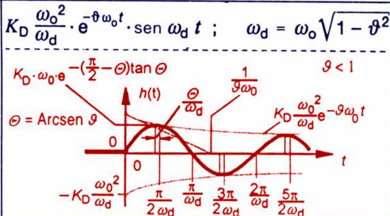
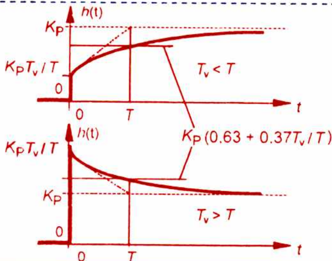
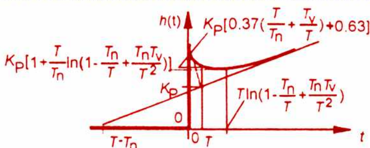
Identificador / Símb. en el diagrama de ctrol.	Ecuación en el dominio del tiempo	Ejemplos de estructura
D-T_2 K_D ϑ, ω_0	$v + 2\frac{\vartheta}{\omega_o}\dot{v} + \left(\frac{1}{\omega_o}\right)^2 \ddot{v} = K_D \cdot \dot{u}$	u, K_D, 1, ϑ, ω_0, v u, $K_D \omega_0^2$, v, $2\vartheta/(K_D \omega_0)$, $1/K_D$
(PD)-T_1 K_P T_v, T	$v + T\dot{v} = K_P \cdot u + K_D \dot{u} = K_P\left[u + T_v \cdot \dot{u}\right]$ $T_v = \frac{K_D}{K_P}$	u, K_P, T_v, 1, T, v u, K_P, $K_P T_v^*$, T, v $T_v^* = T_v - T$ u, K_P, K_D, 1, T, v
(PID)-T_1 K_P T, T_n, T_v	$v + T\dot{v} = K_I\int u\,dt + K_P \cdot u + K_D \cdot \dot{u} = K_P\left[\frac{1}{T_n}\int u\,dt + u + T_v \cdot \dot{u}\right]$ $T_v = \frac{K_D}{K_P}$	u, K_P, T_n, T_v, 1, T, v u, $K_P T_n^* / T_n$, T_n^*, $\frac{K_P}{T_n}(T_n T_v - T\,T_n^*)$, T, v u, K_P, $1/T_n$, T_v, 1, T, v

u'94 a u'102

Ver la explicación de los símbolos en U'35

Ingeniería de control

Elemento de combinación en serie
Elementos (PD)-T1 y (PID)-T1 de combinación en grupo

Función de transferencia $F(s)$ =	Respuesta escalón unitario, ecuación $h(t)$ = / diagrama
$\dfrac{K_D \cdot s}{1 + 2\dfrac{\vartheta}{\omega_o} s + \left(\dfrac{1}{\omega_o}\right)^2 s^2}$	$K_D \dfrac{\omega_o^2}{\omega_d} \cdot e^{-\vartheta \omega_o t} \cdot \text{sen}\, \omega_d t$; $\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \vartheta^2}$ 
$\dfrac{K_P + K_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$ $= K_P \dfrac{1 + T_v \cdot s}{1 + T \cdot s}$ $= K_P + K_P \dfrac{(T_v - T)\cdot s}{1 + T \cdot s}$ $T_v - T = T_v^*$	$K_P + \left[\dfrac{K_D}{T} - K_P\right] e^{-\frac{t}{T}} = K_P \left[1 + \left(\dfrac{T_v}{T} - 1\right) e^{-\frac{t}{T}}\right]$ 
$\dfrac{K_I / s + K_P + K_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$ $= K_P \dfrac{1/(T_n \cdot s) + 1 + T_v \cdot s}{1 + T \cdot s}$ $= K_P \left[\dfrac{1}{T_n \cdot s} + \dfrac{T_n^*}{T_n} + \right.$ $\left. + \dfrac{T_n T_v - T\, T_n^*}{T_n (1 + T \cdot s)} s\right]$ $T_n = K_P / K_I$; $T_v = K_D / K_P$ $T_n^* = T_n - T$	$K_P - K_I T + K_I t + \left[K_I T - K_P + K_D \dfrac{1}{T}\right] e^{-\frac{t}{T}}$ $= K_P \left[1 - \dfrac{T}{T_n} + \dfrac{t}{T_n} + \left(\dfrac{T}{T_n} - 1 + \dfrac{T_v}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}}\right]$ 

■ Ver la explicación de los símbolos en U'05

Ingeniería de control

Métodos para determinar la estabilidad

Estabilidad del circuito de control y cálculo para un controlador
(para circuitos lineales de control)

Definición de estabilidad

La estabilidad se alcanza después de la alteración de la variable de referencia o de la aparición de una variable de perturbación, cuando la variable controlada alcanza un valor estable.

Comentario: El factor de control $R_F(0)$ es el que reduce una perturbación aplicada entre la salida del elemento controlador y el punto de medición. Con un elemento controlador P no se compensan totalmente las perturbaciones como en el caso de un elemento controlador PT.

Métodos para comprobar la estabilidad de un circuito de control

Suposiciones:

* Se conocen la función de referencia o la de transferencia de la perturbación del circuito cerrado de control, o la función escalón unitario.
* Se conoce la función de transferencia de circuito abierto.

1. Criterio de Hurwitz

La estabilidad sólo se puede determinar mediante el criterio de Hurwitz cuando se conoce la función de referencia o la de transferencia de perturbación del circuito cerrado de control, en forma de polinomio.
La estabilidad se alcanza cuando los coeficientes de la ecuación característica (cuando el polinomio del denominador de la función de transferencia = 0)

u'118 $$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n = 0$$

satisfacen las siguientes condiciones:

* Todos los coeficientes a_v deben ser > 0 (ver también G'1)
* Los coeficientes mismos deben cumplir dependencias especiales.

Condiciones para ecuaciones hasta el grado 5:

Ecuación	condiciones de los coeficientes
1er grado	a_0 y $a_1 > 0$
2do grado	$a_0, a_1, a_2 > 0$
3er grado	$a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$
4to grado	$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4 > 0$
5to grado	$A = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_0 a_1 a_4 a_5 - a_1 a_2^2 a_5 - a_1^2 a_4^2 > 0$
	$B = a_0 a_1 a_4 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - a_0 a_3^2 a_4 - a_0^2 a_5^2 > 0$
	$D_{n-1} = A - B > 0$

Para polinomios de mayor grado ver "Ebel, Tjark, Regelungstechnik, 6ª edición, Stuttgart Teubner 1991, pág. 38 y ss."

(Continúa en U'19)

Ventaja: Este método conduce a una definición rápida y exacta acerca de la estabilidad de determinado circuito de control.

Desventaja: No proporciona información acerca de la resiliencia de un circuito de control a la inestabilidad, del resultado de cambios de sus características ni de su comportamiento dinámico; por estas razones generalmente se prefieren otros métodos.

2. Reducción a polinomios únicos

Se transforma la función de transferencia de referencia o de perturbación en una suma de polinomios únicos de 2o. orden como máximo (ver el desarrollo en fracciones parciales en B'1):

En un circuito de control estable sólo hay elementos de transferencia estables. Estos son generalmente elementos puros P o retrasados P y elementos retrasados PD.

Si hay un elemento I, I-T_1 o I-(PD) el circuito de control se volverá inestable.

Ventajas: En los casos estable e inestable, la evaluación de la referencia transformada o de la función de transferencia de perturbación conduce a una conclusión acerca del grado de estabilidad o inestabilidad del circuito de control. Para obtener esta información, deben sobreponerse las funciones de transferencia de todos los elementos sencillos.

Desventajas: No es posible observar el efecto de la introducción de un elemento de control definido ni saber cuál de las características se debe cambiar para obtener el comportamiento requerido de un circuito de control. Después de cada cambio al elemento de control se debe hacer un nuevo cálculo de la transición aritmética del circuito de control abierto al circuito de control cerrado.

3. Criterio de Nyquist

Este criterio establece que el circuito (cerrado) de control es estable cuando el lugar geométrico de la respuesta en frecuencia $F_0(j\omega)$ del circuito de control abierto – en el sentido de los valores mayores de la frecuencia angular ω – siempre tiene a su izquierda el punto crítico -1 en el plano complejo. Mientras mayor sea la distancia entre el lugar geométrico de respuesta en frecuencia y el punto crítico -1, más robusto será el circuito de control respecto a los efectos de variaciones inesperadas en los datos característicos.

Una medida de qué tanto se acerca el sistema a la inestabilidad se expresa con dos valores característicos:

(Continúa en U'20)

Ingeniería de control

U'20

Estabilidad
Elección del tipo de elemento de control

Margen de fase δ (ver U'7) y margen de ganancia ε (ver U'8)

La determinación de los valores reales de ambas características y la obtención de sus valores requeridos mediante la inserción de un elemento adecuado de control se logran a través del diagrama de Bode.

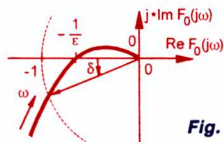


Fig. 8

Valores recomendados para el margen de fase δ : de 30° a 60°
Valores recomendados para el margen de ganancia ε : de 8 a 16 dB
(corresponde a los factores 2.5 a 6.3)

Ventajas: El examen de la función de transferencia $F_0(s)$ del circuito de control abierto – especialmente la respuesta en frecuencia relacionada $F_0(j\omega)$ (sustitución de s por $j\omega$) – conduce con mucha facilidad a un criterio de estabilidad y muestra la resiliencia a la inestabilidad – en especial cuando hay cambios inesperados en las características del circuito de control. También se pueden observar con mucha facilidad los efectos de cambios en el tipo y en las características del elemento de control – usando una inserción en serie sencilla en el circuito de control – al igual que el comportamiento dinámico resultante del circuito de control.

Elección del tipo de elemento de control

General

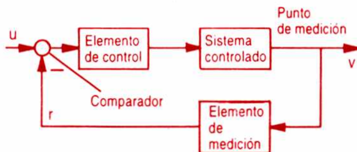
En la mayor parte de los circuitos de control, el sistema controlado y el equipo de medición son, en conjunto, del tipo (PD)-T_n, lo que indica una conexión en serie de varios elementos PD y de elementos de retraso. Los tiempos de acción derivada $T_v = K_D/K_p$ de los elementos PD siempre son esencialmente menores que los tiempos de retraso de los elementos de retraso; en los sistemas reales en un factor mayor que 10.

Los elementos de control más importantes

En los circuitos lineales de control sólo los elementos P, PI, (PD)-T_1 y (PID)-T_1 son verdaderamente importantes.

Características de un circuito de control con un elemento de control P o (PD)-T_1

Cuando hay una influencia de las variables de perturbación aplicadas entre el elemento de control y el punto de medición sólo es posible una exactitud finita. Esa exactitud está expresada por el valor del factor de control $R_F(0)$.



(Continúa en U'21)

Características de un circuito de control con un elemento de control PI o (PID)-T_1

Es posible compensar totalmente la influencia de las variables de perturbación aplicadas entre el elemento de control y el punto de medición. Si el sistema controlado contiene un elemento I **sin** variables de perturbación con retroalimentación negativa aplicadas entre la salida del elemento I en el sistema controlado y el punto de medición, habrá compensación completa aunque no haya factor I.

Nota: Nunca se pueden compensar las variables de perturbación aplicadas entre el punto de medición y la salida del elemento controlador.

Determinación gráfica de un controlador lineal basada en el criterio de Nyquist

General

El procedimiento se lleva a cabo por medio del diagrama de Bode. Para este diagrama son necesarias tanto la construcción de la conexión en serie del sistema controlado como el equipo de medición, al igual que la construcción del elemento de control.
El diagrama de Bode de todo el circuito se determina sumando (multiplicando) la amplitud y la fase de la respuesta de los elementos de transferencia en serie sencilla (ver U′22 y U′23). Esto es posible debido a la naturaleza logarítmica de la amplitud de la respuesta, después de la conversión a dB.
Para el trazo gráfico se debe usar papel semilogarítmico con 4 décadas en el eje x.

Procedimiento:

* Determinar el área de la frecuencia angular ω para la cual se debe trazar el diagrama de Bode; graficar todos los puntos de cruce de interés.
* Sólo se permiten factores de respuesta en frecuencia del tipo I, P, D, T_t, P-T_1, PD y P-T_2, con atenuación $\vartheta < 1$ (ver U′22 y U′23)
* Después de extraer el factor I, los elementos PI se convierten a una estructura I-PD y los elementos PID con $T_n/T_v > 4$ se convierten a una estructura I-PD-PD.
* Todos los coeficientes de acción en serie, el Integral – (K_I), el Proporcional – (K_P) o el Derivado (K_D) se resumen en **un** coeficiente de acción.
* Se representa la amplitud de la respuesta.
* Se representa la fase de la respuesta.
* Se termina mediante el elemento de control.

Las tablas de las páginas U′22 y U′23 muestran los diagramas de Bode para elementos P, I, D, T_t, P-T_1, P-T_2 y PD. Estos diagramas se utilizan para determinar la amplitud y la fase de la respuesta.

U′22 Ingeniería de control

Diagramas de Bode para elementos básicos y elementos P-T_1

Símbolo	Amplitud de la resp. $F(\omega)$ = / Diagrama (Ampl. logarítm.)	Fase de la resp. Arc $F(j\omega) = \varphi$ = / Diagrama (fase lineal)
P	K_P $F\|_{dB}$; $-\infty < n < +\infty$, entero; $K_P\|_{dB}$; 40, 20, 0; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$	0 $\varphi/1°$; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$; 0, -90; $-\infty < n < +\infty$, entero
I	$K_I \cdot 1/\omega$ $F\|_{dB}$; $-\infty < n < +\infty$, entero; 40, 20, 0; -20 dB/década; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$; $K_I = \omega_D$	$-90°$ $\varphi/1°$; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$; 0, -90; $-\infty < n < +\infty$, entero
D	$K_D \cdot \omega$ $F\|_{dB}$; $-\infty < n < +\infty$, entero; 40, 20, 0; 20 dB/década; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$; $1/K_D = \omega_D$	$+90°$ $-\infty < n < +\infty$, entero; $\varphi/1°$; 90, 0; 10^n 10^{n+1} 10^{n+2} 10^{n+3} 10^{n+4} $\{\omega\}$
T_t	1 $F\|_{dB}$; 40, 20, 0; $T_t\,\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2	$-T_t \cdot \omega$ $\varphi/1°$; $\pi/4$, $\pi/2$, π; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2 $T_t\,\omega$; 0, -45, -90, -180
P-T_1	$K_P/\sqrt{1 + (T \cdot \omega)^2}$ $F\|_{dB}$; 40, $K_P\|_{dB}$, 20, 0; 3; -20 dB/déc.; $T\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2	$-\tan^{-1}(T \cdot \omega)$ $\varphi/1°$; $e^{-\pi/2}$, $e^{+\pi/2}$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2 $T\omega$; 0, -45, -90, -180

Ingeniería de control

Diagramas de Bode para elementos P-T2 y PD

Símbolo	Amplitud de la resp. $F(\omega)$ =	Fase de la resp. Arc $F(j\omega) = \varphi$ =
	Diagrama (Ampl. logarítm.)	Diagrama (fase lineal)
P-T2	$0 < \vartheta < \infty$ $$\frac{K_P}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2+4\vartheta^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$	$$\tan^{-1}\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{2\vartheta\frac{\omega}{\omega_o}}-90°$$ $0 < \vartheta < \infty \quad \omega > 0$
	$F\|_{dB}$; $\frac{K_P}{2\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}\Big\|_{dB}$; $\vartheta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2(1-2\vartheta^2)}$; 40; $K_P\|_{dB}$; 20; 0; ϑ; $0.5/\vartheta\|_{dB}$; $1 \geq \vartheta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$; – 40 dB/dec.; ω/ω_0; 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}; $\sqrt{1-2\vartheta^2}$	$\varphi/1°$; 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} ω/ω_0; 0; ϑ; -90; 180
PD	$$\sqrt{K_P^2+(K_D\cdot\omega)^2}$$ $$= K_P\sqrt{1+(T_v\omega)^2}$$ donde $T_v = K_D/K_P$	$\tan^{-1} T_v\,\omega$
	$F\|_{dB}$; 40; $K_P\|_{dB}$; 20; 0; 20 dB/dec.; 3; $T_v\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}; T_v/K_D	$\varphi/1°$; 90; 45; $T_v\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}; -90

U′24 Ingeniería de control

Diagramas de Bode para los elementos (PD)-T1 y (PID)-T1

Símbolo	Amplitud de la resp. $F(\omega)$ = / Diagrama (Ampl. logarítm.)	Fase de la resp. Arc $F(j\omega) = \varphi$ = / Diagrama (fase lineal)
(PD)-T_1	$\sqrt{\frac{K_P^2 + (K_D\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}} = K_p\sqrt{\frac{1 + (T_v\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}}$	$\text{Arctan}(T_v\omega) - \text{Arctan}(T\omega)$
	F|dB; 40; $K_P\|_{dB}$; 20; 0; $K_P \frac{T_v}{T}\|_{dB}$; $T > T_v$; -20dB/dec.; $T_v\,\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2; T_v/T	$\varphi/1°$; $\sqrt{T_v/T}$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2 $T_v\,\omega$; 0; -45; -90; $T > T_v$
	F|dB; 40; $K_P \frac{T_v}{T}\|_{dB}$; $T < T_v$; 20dB/dec.; 20; $K_P\|_{dB}$; 0; $T_v\,\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2; T_v/T	$\varphi/1°$; $T < T_v$; 45; 0; $T_v\,\omega$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2; $\sqrt{T_v/T}$
(PID)-T_1	$\sqrt{\frac{K_P^2 + (K_D\omega - K_I/\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}} = K_P\sqrt{\frac{1 + [T_v\omega - 1/(T_n\omega)]^2}{1 + (T\omega)^2}}$	$\text{Arctan}\left[T_v\omega - \frac{1}{T_n\omega}\right] - \text{Arctan}(T\omega)$; $0 < T_n/T_v < \infty \quad \omega > 0$; $= \text{Arcsen}\frac{T_v\omega - 1/(T_n\omega)}{\sqrt{1 + [T_v\omega - 1/(T_n\omega)]^2}} - \text{Arctan}(T\omega)$; $0 < T_n/T_v < \infty \quad \omega \geq 0$
	F|dB; $T_n > 4T_v$; $T_{vk} > T$; $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{T_n T_v}}$; $K_P\|_{dB}$; $\frac{K_D}{T}\|_{dB}$; -20dB/dec.; 40; 20; 0; >3dB; ω/ω^*; $K_{Pk}\|_{dB}$; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2; $\sqrt{K_D K_I}\|_{dB}$; $\frac{1}{T_{ok}\omega^*}$ $\frac{1}{K_D\omega^*}$ $\frac{K_I}{\omega^*}$ $\frac{1}{T_n\omega^*}$ $\frac{1}{T\omega^*}$	$\varphi/1°$; $T_n > T_v > T$; 45; 0; ω/ω^*; 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1 10^2; -45; -90

Método para representar la amplitud de la respuesta del circuito completo

Nota preliminar: los puntos de quiebre de la amplitud de la respuesta se marcan con flechas en la parte superior de la gráfica.

Una flecha con **una** punta hacia abajo caracteriza una pendiente de **–20 dB/década** que se obtiene mediante un factor P-T_1 (ver U'14) en el punto $1/T$.

Una flecha con dos puntas hacia abajo caracteriza una pendiente de **–40 dB/década** que se obtiene mediante un factor P-T_2 (ver U'15), con $\vartheta < 1$; los factores P-T_2 con $\vartheta > 1$ se dividen en dos factores P-T_1.

Los factores PD (+20 dB/década en el punto $1/T_v$) con pendiente positiva se caracterizan con puntas de flechas hacia arriba.

Después de estimar la variación de la amplitud de la respuesta dentro de las 4 décadas de la frecuencia angular ω, se debe escoger la escala de tal modo que la zona de interés aparezca con la máxima resolución posible; el origen será definido por el valor máximo esperado de la amplitud de la respuesta.

A continuación se determina el valor de la amplitud de la respuesta en el margen izquierdo del dibujo. Si la conexión en serie por representar contiene un factor I o D, el valor y la pendiente iniciales se determinan por I o D; en cualquier otro caso, por el factor P. El valor inicial se determina usando $Fl_{dB} = 20 \log(K_I/\omega)$ (factor I), $Fl_{dB} = 20 \log K_D\omega$ (factor D) o $Fl_{dB} = 20 \log K_P$ (factor P); véase U'22 y U'23.

Comentario: Se deben omitir aquí las unidades físicas de K_I, K_D o K_P, para añadirlas después al hacer la evaluación.

El gradiente de la amplitud de la respuesta hasta el primer quiebre es -20 dB/década (factor I), +20 dB/déc. (factor D) o 0 (factor P). La curva asintótica de la amplitud de la respuesta se traza de un punto de quiebre al siguiente; para ello se deben considerar los cambios anteriores, que corresponden a las flechas indicadas. El factor T_t no influye sobre la amplitud de la respuesta. Por último, se hacen correcciones en los puntos de quiebre: cuando se usa el factor P-T_1, la curva asintótica se corrige en los puntos $\omega_E/2$ y $2\omega_E$ en -1 dB, y en la frecuencia angular de quiebre ω_E en -3 dB.

Cuando se usa el factor PD (inverso del factor P-T_1), se deben hacer las correcciones correspondientes en el punto de quiebre $\omega_E = 1/T_V$ de abajo hacia arriba, (es decir, + 3 dB).

Cerca del punto de quiebre de un factor P-T_2 con $\vartheta < 1$, la curva asintótica se corrige en $-10 \log [1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2 (\vartheta \, \omega/\omega_0)^2]$.

Representación de la fase de la respuesta

La fase de la respuesta del circuito completo se determina sumando las fases de las respuestas individuales de los elementos de transferencia conectados en serie, o de los factores de respuesta en frecuencia.

Los factores individuales contribuyen con los siguientes valores (ver también U′22 y U′23):

Factor	Fase de la respuesta
P	$0°$
I	$-90°$
D	$+90°$
T_t	$-T_t\,\omega$
P-T_1	$-\tan^{-1}\,T\omega$
PD	$+\tan^{-1}\,T_v\,\omega$
P-T_2 con $\vartheta < 1$	$\tan^{-1}\dfrac{1-(\omega/\omega_o)^2}{2\vartheta\,\omega/\omega_o} - 90°$
PI = I - PD	$-90° + \tan^{-1}\,T_n\,\omega$

Tabla A

Comentario: mientras que el factor P no tiene efecto alguno, la contribución del factor T_t es muy importante y aumenta con ω.

Nota: Después de agrupar los factores constitutivos en una suma, a continuación se determinan los valores de la fase de la respuesta, por ejemplo, usando la memoria de una calculadora de bolsillo. En general, la fase de la respuesta del factor T_t se debe sustituir con el factor $180°/\pi$ para obtener un resultado en grados.

Por último, se deben elegir la escala y el origen de la gráfica de la fase de la respuesta de tal manera que la zona de mayor interés aparezca con la máxima resolución posible. La fase de la respuesta se traza en el mismo diagrama que el de la amplitud de la respuesta. La escala del eje *y* se muestra en el margen derecho del dibujo.

Determinación del elemento de control

Problema: El resultado debe ser tal que se satisfagan los requisitos del margen de fase δ **y** del margen ε de ganancia .

Considerando la figura 8 de U′20, esto quiere decir que el indicador de respuesta en la frecuencia del circuito abierto de control final cerca del punto crítico -1 debe satisfacer dos requisitos: en frecuencia angular con amplitud 1 (frecuencia angular de cruce de ganancia) la distancia de fase en la parte negativa del eje real debe ser cuando menos δ, y a la frecuencia angular donde la fase es $-180°$ (la frecuencia angular de cruce de fase), la amplitud debe de ser como máximo, $1/\varepsilon$.

(Continúa en U′27)

Procedimiento

① Elegir las razones entre los tiempos característicos inherentes al elemento de control y la frecuencia angular de quiebre ω_E, la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D (realización de la instrucción del margen de fase) o la frecuencia angular de cruce de fase ω_π (realización de la instrucción del margen de ganancia).

Comentario: Debido al eje ω con escala logarítmica, se obtienen distancias definidas entre los puntos de quiebre de la amplitud de la respuesta y las frecuencias angulares elegidas para la determinación.

En la práctica se aconsejan los siguientes valores:

Tabla B

Tipo del elemento de control	$T_n\omega_D$ resp. $T_n\omega_\pi$	$T_v\omega_D$ resp. $T_v\omega_\pi$	T_{nk}/T_{vk}	$T_{vk}\omega_D$ resp. $T_{vk}\omega_\pi$	$1/(T\,\omega_D)$ resp. $1/(T\,\omega_\pi)$
P	–	–	–	–	–
PI	4 . . . 10	–	–	–	–
(PD)-T_1	–	4 . . . 10	–	–	8 . . . 20
(PID)-T_1	–	–	2 . . . 10	4 . . . 10	8 . . . 20

Los valores reales de los tiempos característicos del elemento de control no se conocen sin calcularlos.

Después de elegir la razón, se fijan las **formas** de la amplitud y de la fase de la respuesta.

La **posición** final de la amplitud y de la fase de la respuesta se determinan mediante el siguiente procedimiento:

Se hace un corrimiento en la dirección del eje *x* determinando la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D, o la frecuencia angular de cruce de fase ω_π. Se hace un corrimiento en la dirección del eje *y* (sólo en la curva de amplitud de la respuesta) determinando la ganancia proporcional K_{PR}* o el coeficiente de acción integral K_{IR}* del elemento de control.

Además se conocen la fase $\phi_R^*(\omega_D)$ para el margen de fase y $\omega_R^*(\omega_\pi)$ para la determinación del margen de ganancia [en este caso $\phi_R^*(\omega_D) = \omega_R^*(\omega_\pi)$]. Éstas son las fases que tiene el elemento de control en la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D, hasta ahora desconocida, y en la frecuencia
② angular de cruce de fase ω_π, respectivamente. El valor de la fase se determina calculándolo (ver la tabla A en U'26), o con valores demostrados que ya contengan la elección de las razones que describimos arriba.

* El subíndice $_R$ representa valores que pertenecen al elemento de control.
O Pasos numerados para los ejemplos en U'31 y U'33.

Condición de margen de fase

Obtención de la condición de margen de fase

③ El margen de fase δ y la fase $-\phi_R$* del elemento de control se utilizan para determinar $\phi_\delta = -\phi_R{}^* - 180° + \delta$.

Comentario: Mientras más negativa es la fase ϕ_R* del elemento controlado, menos negativa se permite que sea la ϕ_y* de la conexión en serie formada por el sistema controlado y el equipo de medición.

④ La frecuencia angular con fase ϕ_δ se debe determinar en la fase de la respuesta $\phi_y(\omega)$* de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición. Esta frecuencia angular debe convertirse en la frecuencia angular de cruce de ganancia $\omega_{D\delta}$. A esta frecuencia, la amplitud de la respuesta $F_{0\delta}$ del circuito abierto de control final determinado debe pasar por la línea de 0 dB.

⑦ Este requisito se satisface cuando la amplitud inversa de la respuesta del equipo de control se grafica de tal modo que corte la respuesta $F_y(\omega)$* de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición en $\omega_{D\delta}$.

La construcción de la amplitud inversa de la respuesta, $F_R(\omega)^{-1*}$, del elemento de control se lleva a cabo según U'25; la inversión se alcanza mediante la anulación de los valores de la pendiente, mientras permanecen fijos los puntos de quiebre. La curva se traza hacia ambos lados a partir de la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D.

⑤ La posición de los puntos de quiebre se determina cuando se aplican las razones que se eligieron inicialmente a la frecuencia angular de cruce de ganancia $\omega_{D\delta}$ determinada a partir del diagrama.

⑥ La pendiente de las secciones de la curva asintótica de la amplitud de la respuesta $F_R(\omega)^{-1*}$ se traslada por desplazamiento paralelo de dos líneas auxiliares que se han graficado antes en una parte desocupada del diagrama de Bode. Sólo se necesitan correcciones cuando la intersección queda dentro de su área.

⑧ A partir de la amplitud de la respuesta inversa determinada $F_R(\omega)^{-1*}$ del elemento de control, se puede leer el (K_{PR}*) proporcional – o el coeficiente de acción de integración (K_{IR}*) del elemento de control. Con estos valores se pueden determinar elementos de control de los tipos P, PI y
⑨ (PD)-T_1. Se pueden determinar los coeficientes de acción de conexión en serie K_{PK}, T_{nk} y T_{vk} para el elemento de control (PID)-T_1. Éstos se transforman en los coeficientes de acción de conexión en paralelo K_{PR}*, T_n y T_v mediante las siguientes relaciones. Para valores grandes de las razones T_{nk}/T_{vk} ($T_{nk}/T_{vk} > 10$) se puede omitir la conversión.

$$K_{PR} = \frac{K_{Pk}}{T_{nk}} \cdot (T_{nk} + T_{vk}); \; T_n = T_{nk} + T_{vk}; \; K_{IR} = \frac{K_{PkR}}{T_{nk}}; \; T_v = \frac{T_{nk} \cdot T_{vk}}{T_{nk} + T_{vk}}$$

* El subíndice $_R$ (subíndice $_y$) caracteriza valores pertenecientes al elemento de control (sistema controlado).

O Pasos numerados para los ejemplos en U'31 y U'33).

Obtención de la condición de margen de ganancia

La determinación es muy parecida a la de la condición de margen de fase:

(11) – Determinar la fase $\phi_\varepsilon = -\phi_R^* - 180°$.

(12) – Determinar la frecuencia angular de cruce de fase, $\omega_{\pi\varepsilon}$, donde se alcanza la fase ϕ_ε en la fase de la respuesta $\varphi_y(\omega)^*$ de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición; a esta frecuencia la fase de la respuesta $\varphi(\omega)$ del circuito abierto de control final determinado pasa a través de la línea de −180°.

(13) – Determinar la ubicación de los puntos de quiebre cuando se aplican las razones arriba mencionadas al valor de la frecuencia angular de cruce de fase determinada en el diagrama.

(14) – Determinar la pendiente m_F de la amplitud de la respuesta inversa $F_R(\omega)^{-1*}$ del elemento de control cerca de la frecuencia angular de cru-
(15) ce de fase $\omega_{\pi\varepsilon}$. Se traza una sección asintótica con esta pendiente, a través del punto del valor de amplitud de la respuesta de $F_y(\omega)^*$ del sistema controlado y el equipo de medición en la frecuencia angular de cruce de fase $\omega_{\pi\varepsilon}$.

(16) – La amplitud inversa de la respuesta $F_R(\omega)^{-1}$ del elemento de control se grafica y se evalúa en la distancia ε_{IdB} (arriba de esta sección asintótica) de la misma forma que se hizo antes para obtener el margen de fase.

(17) – En el caso de un elemento de control (PID)-T_1, se sigue el mismo método que en ⑨.

(18) Nota: Se recomienda, además, determinar la frecuencia angular de cruce de ganancia $\omega_{D\varepsilon}$. Esa frecuencia está en el punto de intersección de $F_y(\omega)^*$ de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición, y la amplitud inversa de la respuesta $F_{R\varepsilon}(\omega)^{-1*}$ del elemento de control.

Elección de uno de los dos elementos de control que se determinaron

(21) No sólo la obtención de la condición de margen de fase, sino también la del margen de ganancia, conduce a la determinación de un elemento de control. Se escoge el elemento con el menor coeficiente de acción proporcional – o integral. Salvo algunas raras excepciones, con esta elección el elemento de control también cumple el otro requisito de la determinación.

Comparación entre elementos de control determinados por medio de la elección de distintas razones

Con la elección de distintas razones se obtiene el mejor comportamiento del elemento de control determinado para el elemento con el valor máximo de la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D. Esta frecuencia angular – determinada para el circuito abierto de control – es una cantidad que indica la rapidez con la que se llega al valor final en el circuito cerrado de control.

* Ver la explicación de los subíndices $_R$ y $_y$ en la nota al pie de la página U'28.

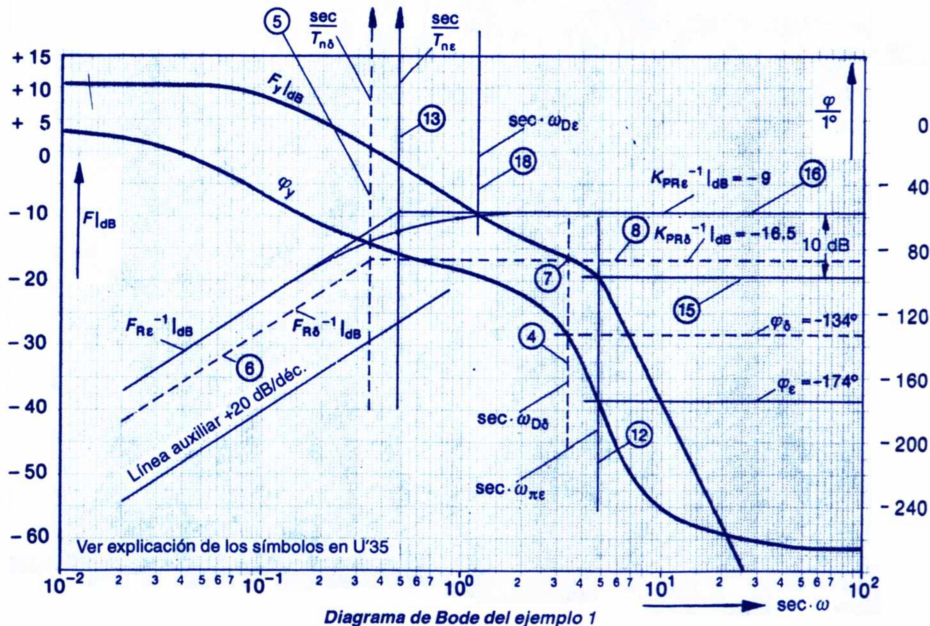


Diagrama de Bode del ejemplo 1

Ejemplo 1: Determinación de un elemento de control PI o P

Problema: Determinar un elemento de control PI con $T_n = 10/\omega_D$ y $T_n = 10/\omega_\pi$ para un circuito de control con la conexión en serie de sistema controlado y equipo de medición de comportamiento P-T_3 (P-T_1-T_2). El margen de fase δ debe ser 40° mínimo, el margen ε de ganancia 3.16 mínimo (corresponde a 10 dB).

$$F(s) = \frac{r(s)}{y(s)} = \frac{4}{(1+10\,\mathrm{sec}\cdot s)\,[1+0.8/(5\,\mathrm{sec})\,s+1/(25\,\mathrm{sec}^2)\,s^2]}$$

Solución: De acuerdo con U'13 a U'17, se leen primero los datos característicos $K_{Py} = 4$, $T = 10$ seg, $\omega_o = 5$ seg^{-1}, en la función de transferencia F(s) de la conexión en serie. A continuación, según U'22, se deben trazar la amplitud de la respuesta F_y y la fase de la respuesta ϕ_y de la conexión en serie.

Los siguientes pasos de la determinación están numerados dentro de un círculo en el margen izquierdo de las páginas U'27 a U'29. Esos números también se muestran en el diagrama de Bode de U'30 en sus lugares correspondientes. En esos pasos se determinan los siguientes resultados:

2 $\varphi_R(\omega_D) = \varphi_R(\omega_\pi) = -90° + \mathrm{Arctan}\,[(10/\omega_D)\cdot\omega_D] \approx -6°$
3 $\varphi_\delta = -180° + 40° + 6° = -134°$
4 $\omega_{D\delta} = 3.4\ \mathrm{sec}^{-1}$
5 Debido al $T_n = 10/\omega_D \rightarrow 1/T_{n\delta} = 0.34\ \mathrm{sec}^{-1} \rightarrow T_{n\delta} = 2.94$ sec
8 $K_{PR\delta}$ en dB $= 16.5 \rightarrow K_{PR\delta} = 6.68 \rightarrow K_{IR\delta} = 2.23\ \mathrm{sec}^{-1}$
11 $\varphi_\varepsilon = -180° + 6° = -174°$
12 $\omega_{\pi\varepsilon} = 4.8\ \mathrm{sec}^{-1}$
13 Debido al $T_n = 10/\omega_\pi \rightarrow 1/T_{n\varepsilon} = \omega_{\pi\varepsilon}/10 = 0.48\ \mathrm{sec}^{-1}$ $\rightarrow T_{n\varepsilon} = 2.08$ sec
14 $m_F = 0$
16 $K_{PR\varepsilon}$ en dB $= 9 \rightarrow K_{PR\varepsilon} = 2.82 \rightarrow K_{IR\varepsilon} = 1.32\ \mathrm{sec}^{-1}$
18 $\omega_{D\varepsilon} = 1.2\ \mathrm{sec}^{-1}$
21 $K_{PR\varepsilon} < K_{PR\delta} \rightarrow K_{PR} = 2.82$.

De acuerdo con esta lista, el controlador requerido tiene los datos característicos: $K_{PR} = 2.82$; $T_n = 2.08$ seg.

La rapidez con la que el circuito controlado que usa este controlador llega a sus valores finales se caracteriza por $\omega_D = 1.2$ seg^{-1}.

La determinación de un **elemento controlador P** se lleva a cabo en forma parecida a la del elemento de control PI:

El resultado de acuerdo con los pasos numerados es:

3 $\varphi_\delta = -180° + 40° = -140°$
4 $\omega_{D\delta} = 3.4\ \mathrm{sec}^{-1}$
8 $K_{PR\delta}$ en dB $= -16.5 \rightarrow K_{PR\delta} = 6.7$

11 $\varphi_\varepsilon = -180°$
12 $\omega_{\pi\varepsilon} = 5\ \mathrm{sec}^{-1}$
16 $K_{PR\varepsilon}$ en dB $= -10 \rightarrow K_{PR\varepsilon} = 3.16$

(Continúa en U'33)

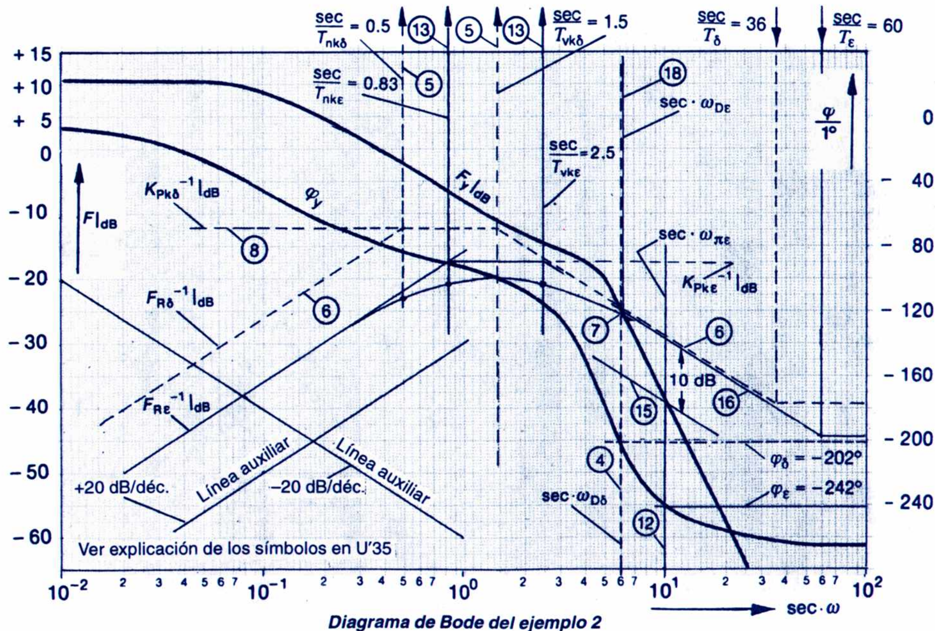


Diagrama de Bode del ejemplo 2

18 $\omega_{D\varepsilon} = 1.3\ \text{sec}^{-1}$

21 $K_{PR\varepsilon} < K_{PR\delta} \rightarrow K_{PR} = 3.16$;
$V_o = K_{PR} \cdot K_{Py} = 3.16 \cdot 4 = 12.6 \rightarrow R_F(0) = 1/(1 + V_o) = 7.3\%$.
Los pasos 1, 2, 5, 6, 9, 13 y 14 no son aplicables en la determinación. !Los pasos 7 y 15 sólo se llevan a cabo dentro del diagrama de Bode!

Comentario: El factor de control $R_F(0)$ es aquel con el que se reduce una perturbación aplicada entre la salida del elemento de control y el punto de medición. Con un elemento de control P las perturbaciones no se compensan por completo, como es el caso de un elemento de control PI.

Ejemplo 2: Determinación de un elemento de control (PID)-T₁

Problema: Para un circuito de control con la misma conexión en serie que la del ejemplo 1, determinar un elemento de control (PID)-T_1 para los siguientes valores:

$1/T_{nk\delta} = \omega_{D\delta}/12$ $1/T_{vk\delta} = \omega_{D\delta}/4$ $1/T_\delta = 6\,\omega_{D\delta}$
$1/T_{nk\varepsilon} = \omega_{\pi\varepsilon}/12$ $1/T_{vk\varepsilon} = \omega_{\pi\varepsilon}/4$ $1/T_\varepsilon = 6\,\omega_{\pi\varepsilon}$

Los márgenes de fase y de ganancia deben tener los mismos valores que en el ejemplo 1.

Solución: La amplitud y la fase de la respuesta se pueden tomar del ejemplo 1. Se deben llevar a cabo los pasos numerados (en círculos) en el margen izquierdo de las páginas U′27 a U′29; esos números también se muestran en la gráfica de U′32. Los resultados de los pasos respectivos son:

2 $\varphi_{R\delta} = -90° + \text{Arctan}\,(12\,\omega_D/\omega_D) + \text{Arctan}\,(4\,\omega_D/\omega_D) - \text{Arctan}\,[(1/6)\cdot(\omega_D/\omega_D)] = 62°$

3 $\varphi_\delta = -180° + \delta - \varphi_R = -180° + 40° - 62° = -202°$

4 $\omega_{D\delta} = 6.0\ \text{sec}^{-1}$

5 $1/T_{nk\delta} = \omega_{D\delta}/12 = 6/(12\ \text{sec}) = 0.5\ \text{sec}^{-1}$; $T_{nk\delta} = 2\ \text{sec}$;
$1/T_{vk\delta} = \omega_D/4 = 6/(4\ \text{sec}) = 1{,}5\ \text{sec}^{-1}$; $T_{vk\delta} = 0.67\ \text{sec}$;
$1/T_\delta = 6\,\omega_D = 36\ \text{sec}^{-1} \rightarrow T_\delta = 28\ \text{msec}$

8 $K_{PkR\delta}$ en dB = 12 $\rightarrow K_{PkR\delta} = 4$

9 $K_{PR\delta} = (4/2)\cdot 2.67 = 5.34$
$T_{n\delta} = (2 + 0.67)\ \text{sec} = 2.67\ \text{sec}$; $T_{v\delta} = 2\cdot 0.67\ \text{sec}/2.67 = 0{,}5\ \text{sec}$

11 $\varphi_\varepsilon = -180° - \varphi_{R1} = -242°$

12 $\omega_{\pi\varepsilon} = 10\ \text{sec}^{-1}$

13 $1/T_{nk\varepsilon} = \omega_{\pi\varepsilon}/12 = 10/12\ \text{sec}^{-1} = 0.83\ \text{sec}^{-1}$; $T_{nk\varepsilon} = 1.2\ \text{sec}$.
$1/T_{vk\varepsilon} = \omega_{\pi\varepsilon}/4 = 10/4\ \text{sec}^{-1} = 2.5\ \text{sec}^{-1}$; $T_{vk\varepsilon} = 0.4\ \text{sec}$;
$1/T_\varepsilon = 6\,\omega_{\pi\varepsilon} = 60\ \text{sec}^{-1}$; $T_\varepsilon = 17\ \text{msec}$

14 $m_F = -20$ dB/Dek.

16 $K_{PkR\varepsilon}$ en dB = 17 $\rightarrow K_{PkR\varepsilon} = 7.1$

17 $K_{PR\varepsilon} = 7.1/1.2\cdot(1.2 + 0.4) = 9.47$; $T_{n\varepsilon} = (1.2 + 0.4)\ \text{sec} = 1.6\ \text{sec}$;
$T_{v\varepsilon} = 1.2\cdot 0.4/(1{,}2 + 0.4)\ \text{sec} = 0.3\ \text{sec}$.

18 $\omega_{D\varepsilon} = 6.2\ \text{sec}^{-1}$

21 $K_{PR\delta} < K_{PR\varepsilon} \rightarrow K_{PR} = 5.34$

(Continúa en U′34)

Continuación de U'33

El elemento de control (PID)-T_1 adecuado tiene los datos característicos: $K_{PR} = 5.34$, $T_h = 2.67$ seg, $T = 0.5$ seg.

La rapidez con que el circuito de control adecuado llega al valor final se caracteriza por $\omega_D = 6.0$ seg^{-1}.

Reglas empíricas para ajustar elementos de control P, PI y PID

Para sistemas controlados con un elemento de retraso de primer orden y un elemento de tiempo muerto – esto es, sistemas controlados **sin la parte I** o factores I – *ZIEGLER* y *NICHOLS* recomiendan los siguientes datos característicos para los tipos de elementos de control arriba citados.

Se conocen K_{Py}, T_y y T_{ty} del sistema controlado:

Tabla C

controlador	K_{PR}	T_n	T_v
P	$\frac{T_y}{K_{Py} \cdot T_{ty}}$		
PI	$0.9 \frac{T_y}{K_{Py} \cdot T_{ty}}$	$3.3\ T_{ty}$	
PID	$1.2 \frac{T_y}{K_{Py} \cdot T_{ty}}$	$2\ T_{ty}$	$0.5\ T_{ty}$

Se **desconocen** los datos característicos del sistema controlado:

Tabla D

controlador	K_{PR}	T_n	T_v
P	$0.5\ K_{PR\,crít}$*		
PI	$0.45\ K_{PR\,crít}$*	$0.83\ T_{crít}$**	
PID	$0.6\ K_{PR\,crít}$*	$0.5\ T_{crít}$**	$0.125\ T_{crít}$**

* $K_{PR\,crít}$: Valor de K_{PR} cuando hay oscilación permanente en el circuito de control.

** $T_{crít}$: Período de oscilación, cuando hay oscilación permanente.

Ingeniería de control

Abreviaturas y fórmulas

Tipos de elementos de transferencia

D: Elemento derivado
D-T_1: Elemento derivado con retraso de 1er orden
D-T_2: Elemento derivado con retraso de 2º orden
I: Elemento integral
I-T_1: Elemento integral con retraso de 1er orden
P: Elemento proporcional
PD: Elemento derivado proporcional
PI: Elemento integral proporcional
PID: Elemento derivado integral proporcional
P-T_1: Elemento de retraso de 1er orden
P-T_2: Elemento de retraso de 2º orden
(PD)-T_1: Elemento PD con retraso de 1er orden
(PID)-T_1: Elemento PID con retraso de 1er orden
T_t: elemento de tiempo muerto

Símbolos usados para términos de ingeniería de control

e : Variable de error
m_F : Pendiente de la amplitud de la respuesta en el diagrama de Bode
r : Variable de retroalimentación
u : Variable de entrada
v : Variable de salida
v_m : Sobrepaso de la función escalón unitario de un elemento de transferencia
w : Variable de referencia
w^* : Variable objetivo
x : Variable controlada
x_A : Variable controlada final
x_m : Sobretiro de la variable controlada
y : Variable reguladora
z : Variable de perturbación
$F(j\omega)$: Frecuencia de la respuesta
$F(s)$: Función de transferencia
$F(\omega)$: Amplitud de la respuesta
$F_o(j\omega)$: Frecuencia de la respuesta del circuito abierto de control
$F_o(s)$: Función de transferencia del circuito abierto de control
$F_o(\omega)$: Amplitud de la respuesta del circuito abierto de control
$F_R(\omega)$: Amplitud de la respuesta del elemento de control
$F_y(\omega)$: Amplitud de la respuesta de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición
K_D : Coeficiente de acción derivada
K_I : Coeficiente de acción integral
K_P : Coeficiente de acción proporcional
$R_F(0)$: Factor de control
$K_{Pk}(\omega)$: Coeficiente de acción proporcional en la representación en serie del elemento PID con $T_n > 4T_v$
$K_{IR}(\omega)$: Coeficiente de acción integral del elemento controlado
K_{PR} : Coeficiente de acción proporcional del elemento controlado
T : Tiempo de retraso
T_g : Tiempo de crecimiento
T_h : Período de vida media
T_n : Tiempo de restablecimiento
T_{fin} : Tiempo para alcanzar el estado estable
T_{inicio} : Tiempo para alcanzar la tolerancia inferior
T_u : Tiempo muerto equivalente
T_v : Tiempo de derivada
T_{nk}, (T_{vk}): Tiempo de restablecimiento (tiempo de derivada) en la representación en serie del elemento PID con $T_n > 4\ T_v$.
$T_{nk\delta}$, ($T_{vk\delta}$):Tiempo de restablecimiento (tiempo de derivada) en la representación en serie del elemento PID con $T_n > 4\ T_v$, determinado según el requisito de la fase
$T_{nk\varepsilon}$, ($T_{vk\varepsilon}$):Tiempo de restablecimiento (tiempo de derivada) en la representación en serie del elemento PID con $T_n > 4T_v$, determinado según el requisito del margen de ganancia
ε : Margen de ganancia
δ : Margen de fase
φ_δ : Fase de la conexión en serie (sistema controlado, equipo de medición) en la frecuencia angular de cruce de ganancia ω_D, que cumple con el margen de fase δ
ϕ_ε : Fase de la conexión en serie (sistema controlado, equipo de medición) en la frecuencia angular de cruce de fase ω_π
$\phi(\omega)$: Fase de la respuesta
$\phi_o(\omega)$: Fase de la respuesta del circuito abierto de control
$\phi_R(\omega)$: Fase de la respuesta del elemento de control
$\phi_y(\omega)$: Fase de la respuesta de la conexión en serie del sistema controlado y el equipo de medición
ϑ : Frecuencia de amortiguamiento
ω : Frecuencia angular
ω_o : Frecuencia angular característica
ω_δ : Frecuencia angular propia
ω_D : Frecuencia angular de cruce de ganancia
ω_E : Frecuencia angular en el quiebre
$\omega_{D\delta}$: Frecuencia angular de cruce de ganancia al cumplir con la condición de margen de fase
$\omega_{D\varepsilon}$: Frecuencia angular de cruce de ganancia al cumplir con la condición de margen de ganancia
ω_π : Frecuencia angular de cruce de fase
$\omega_{\pi\varepsilon}$: Frecuencia angular de cruce de fase, cumpliendo con el margen de ganancia ε.

Tablas

Propiedades térmicas de líquidos

Z'1

Líquidos	t	ϱ	c_p	κ [1]	$10^6\eta$ [2]	Pr [3]
	°C	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{kJ}{kg\ K}$	$\frac{W}{m\ K}$	Pa·s	–
Agua	0	999,8	4,217	0,5620	1791,8	13,44
	20	998,3	4,182	0,5996	1002,6	6,99
	50	988,1	4,181	0,6405	547,1	3,57
	100	958,1	4,215	0,6803	281,7	1,75
	200	864,7	4,494	0,6685	134,6	0,90
Octano	–25	738	2,064	0,144	1020	14,62
C_8H_{18}	0	719	2,131	0,137	714	11,11
Etanol	–25	–	2,093	0,183	3241	37,07
C_2H_5OH	0	806	2,232	0,177	1786	22,52
	20	789	2,395	0,173	1201	16,63
	50	763	2,801	0,165	701	11,90
	100	716	3,454	0,152	326	7,41
Benceno (o benzol)	20	879	1,729	0,144	649	7,79
C_6H_6	50	847	1,821	0,134	436	5,93
	100	793	1,968	0,127	261	4,04
	200	661	–	0,108	113	–
Tolueno (o toluol)	0	885	1,612	0,144	773	8,65
C_7H_8	20	867	1,717	0,141	586	7,14
	50	839	1,800	0,136	419	5,55
	100	793	1,968	0,128	269	4,14
	200	672	2,617	0,108	133	3,22
Dióxido de azufre	0	1435	1,33	0,212	368	2,31
SO_2	20	1383	1,37	0,199	304	2,09
	50	1296	1,48	0,177	234	1,96
Amoniaco	–50	695	4,45	0,547	317	2,58
NH_3	0	636	4,61	0,540	169	1,44
	20	609	4,74	0,521	138	1,26
	50	561	5,08	0,477	103	1,10
Aceite lubricante	20	871	1,85	0,144	13060	168
	50	852	2,06	0,143	5490	79
	100	820	2,19	0,139	2000	32
Aceite para transformador	20	866	–	0,124	31609	482
	60	842	2,29	0,122	7325	125
	100	818	2,29	0,119	3108	60
Mercurio Hg	0	13546	0,139	9,304	1558	0,02
Glicerina $C_3H_8O_3$	20	1260	2,366	0,286	$15\cdot10^6$	$1{,}24\cdot10^{11}$

[1] Conductividad térm. [2] Viscosidad (din.) [3] Núm. Prandtl

Z′2 Tablas

Propiedades térmicas de gases

Gases (a 1000 mbar)	t °C	ϱ $\frac{kg}{m^3}$	c_p $\frac{kJ}{kg\ K}$	x 1) $\frac{W}{m\ K}$	$10^6\eta$ 2) Pa·s	Pr 3) –
Aire (seco)	–20	1,377	1,006	0,023	16,15	0,71
	0	1,275	1,006	0,025	17,10	0,70
	20	1,188	1,007	0,026	17,98	0,70
	100	0,933	1,012	0,032	21,60	0,69
	200	0,736	1,026	0,039	25,70	0,68
	400	0,517	1,069	0,053	32,55	0,66
Dióxido de carbono	–30	2,199	0,800	0,013	12,28	0,78
CO_2	0	1,951	0,827	0,015	13,75	0,78
	25	1,784	0,850	0,016	14,98	0,78
	100	1,422	0,919	0,022	18,59	0,77
	200	1,120	0,997	0,030	26,02	0,76
Cloro	0	3,13	0,473	0,0081	12,3	0,72
Cl	25	2,87	0,477	0,0093	13,4	0,69
	100	2,29	0,494	0,012	16,8	0,69
Amoniaco	0	0,76	2,056	0,022	9,30	0,87
NH_3	25	0,70	2,093	0,024	10,0	0,87
	100	0,56	2,219	0,033	12,8	0,86
	200	0,44	2,366	0,047	16,5	0,83
Oxígeno	–50	1,73	0,903	–	16,3	–
O_2	0	1,41	0,909	0,024	19,2	0,73
	25	1,29	0,913	0,026	20,3	0,71
	100	1,03	0,934	0,032	24,3	0,71
	200	0,81	0,963	0,039	28,8	0,71
Dióxido de azufre	0	2,88	0,586	0,0086	11,7	0,80
SO_2	25	2,64	0,607	0,0099	12,8	0,78
	100	2,11	0,662	0,014	16,3	0,77
Nitrógeno	0	1,23	1,038	0,024	16,6	0,72
N_2	25	1,13	1,038	0,026	17,8	0,71
	100	0,90	1,038	0,031	20,9	0,70
	200	0,71	1,047	0,037	24,7	0,70
Hidrógeno	–50	0,11	13,50	0,141	7,34	0,70
H_2	0	0,09	14,05	0,171	8,41	0,69
	25	0,08	14,34	0,181	8,92	0,71
	100	0,07	14,41	0,211	10,4	0,71
	200	0,05	14,41	0,249	12,2	0,71
Vapor de agua (saturado)	0	0,0049	1,864	0,0165	9,22	1,041
	50	0,0830	1,907	0,0203	10,62	0,999
	100	0,5974	2,034	0,0248	12,28	1,007
	200	7,865	2,883	0,0391	15,78	1,163
	300	46,255	6,144	0,0718	19,74	1,688

1) Conductividad térm. 2) Viscosidad (din.) 3) Núm. Prandtl

Esfuerzos permisibles por flexión o torsión, y módulos E y G para materiales elásticos, en N/mm²

Material	Mód. elást. axial E	Tipo de carga[1]	$\sigma_{f(perm.)}$ A	$\sigma_{f(perm.)}$ B	$\sigma_{f(perm.)}$ C	Mód. elást. ang. G	$\tau_{t(perm.)}$
Acero para resortes SAE 1078 templado y revenido	210000	I	1000	500	150	80000	650
		II	750	350	120		500
		III	500	250	80		350
Latón amarillo ASTM-B 134 (274) HV 150; DIN 17222	110000	I	200	100	40	42000	120
		II	150	80	30		100
		III	100	50	20		80
Plata alemana ASTM-B 122 (752); 65-18 HV 160	142000	I	300	150	50	55000	200
		II	250	120	40		180
		III	200	100	30		150
Bronce común CDA-419 HV 190	110000	I	200	100	40	42000	120
		II	150	80	30		100
		III	100	50	20		80
Bronce fosforado CDA-529 HV 190	117000	I	300	150	50	45000	200
		II	220	110	40		180
		III	150	80	30		150

A: para resortes simples (factor de seguridad ≈ 1.5)
B: para resortes conformados (factor de seguridad ≈ 3)
C: para resortes sin efecto de histéresis (factor de seguridad ≈ 10)
[1] Véase el significado en P 1, Parte I.

Cantidades características para el maquinado
(para torneado exterior longitudinal)

Material Aceros:	Resistencia o dureza (en N/mm²[2])	mc	$1 - mc$	$k_{c\ 1.1}$ N/mm²
ASTM – A572	520	0,26	0,74	1990
UNS – K04600	720	0,30	0,70	2260
SAE – 1045	670	0,14	0,86	2220
SAE – 1060	770	0,18	0,82	2130
SAE – 5120	770	0,26	0,74	2100
SAE – 3140	630	0,30	0,70	2260
SAE – 4135	600	0,21	0,79	2240
SAE – 4140	730	0,26	0,74	2500
SAE – 6150	600	0,26	0,74	2220
SAE – L6 (recocido)	940	0,24	0,76	1740
SAE – L6 (revenido)	ASTME18-74-HRD54	0,24	0,76	1920
Mehanite A	360	0,26	0,74	1270
Hierro colado c/enfr.	ASTME18-74-HRD60	0,19	0,81	2060
ASTM – A48-40B	ASTME18-74-HRD33	0,26	0,74	1160

Los valores especificados se aplican directamente al torneado con herramienta con punta de carburo. Velocidad de corte v = 90, . . . , 125 m/min.
Grosor de la viruta h: 0.05 mm ≤ h ≤ 2.5 mm.
Angulo lateral normal normal γ = 6° para acero, γ = 2° para hierro colado
Relación de esbeltez ϵ_s = 4.

Tablas

Presiones de contacto permisibles

Valores de $p_{c\,(perm.)}$ en N/mm²

Características de muñones, cojinetes y placas de apoyo:

Material		p_c	Material		p_c
Acero 37	Carga H	210	Acero 52	Carga H	320
	Carga HZ	240		Carga HZ	360

Lubricación: Véanse manuales o textos (acción hidrodinámica)

Acción con lubricación mixta, eje o muñón templado y rectificado[1] [2]

Material	v m/s	p_c	Material	v m/s	p_c
Hierro colado gris		5	Bronce colado CDA 902		
Latón rojo (836)		8...12	Lubricación con grasa	<0,03	4...12
	1	20[3]	Cojinetes de alta calidad	<1	60
Bronce común (938)	0,3 ...1	15[3]	PA 66 (Poliamida)	→0	15
			en seco	1	0,09
Hierro sinterizado	<1	6	lubricación con grasa[5]	1	0,35
	3	1	HDPE (Polietileno de alta densidad)	→0	2...4
Hierro sinterizado con cobre	<1	8			
	3	3		1	0,02
Bronce sinterizado	<1	12	PTFE (Politetra-fluoroetileno, encubierto)	→0	30
	3	6			
	5	4		1	0,06
Bronce común grafitado Metal DEVA)	<1	20 ⋮ 90 [4]	PTFE + plomo + bronce	<0,005	80... 140[4]
			Cojinete DU	0,5...5	<1

Superficies no deslizantes, de tipo general: Valores máximos hasta el punto de fluencia o cedencia a la compresión del material son posibles de usar. Los valores normales para una p_c aceptable son inferiores.

Materiales	Valores normales de p_c para carga: estable	pulsante	de choque
Acero	80...150	60...100	30...50
Hierro colado	70... 80	45... 55	20...30
Hierro maleable	50... 80	30... 55	20...30
Bronce	30... 40	20... 30	10...15
Metal para cañón	25... 35	15... 25	8...12

[1] El producto $(p \cdot v)_{perm.}$ está estrechamente relacionado con la disipación de calor, carga, presión de contacto y tipo de lubricación.

[2] Con lubricación hidrodinámica es posible una mayor capacidad de carga (para todos los metales de cojinetes).

[3] Duración limitada de las partes en desgaste.

[4] Casos extremos (metales especiales).

[5] Para espesor de casquillo de 1 mm.

Tablas

Valores estadísticos

Z′5

Función de error

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt; \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi_0(x)$	erf (x)	x	$\varphi(x)$	$\Phi_0(x)$	erf (x)
0,00	0,398 942	0,000 000	0,000 000	0,50	0,352 065	0,382 925	0,520 500
0,01	0,398 922	0,007 979	0,011 283	0,51	0,350 292	0,389 949	0,529 244
0,02	0,398 862	0,015 957	0,022 565	0,52	0,348 493	0,396 936	0,537 899
0,03	0,398 763	0,023 933	0,033 841	0,53	0,346 668	0,403 888	0,546 464
0,04	0,398 623	0,031 907	0,045 111	0,54	0,344 818	0,410 803	0,554 939
0,05	0,398 444	0,039 878	0,056 372	0,55	0,342 944	0,417 681	0,563 323
0,06	0,398 225	0,047 845	0,067 622	0,56	0,341 046	0,424 521	0,571 616
0,07	0,397 966	0,055 806	0,078 858	0,57	0,339 124	0,431 322	0,579 816
0,08	0,397 668	0,063 763	0,090 078	0,58	0,337 180	0,438 085	0,587 923
0,09	0,397 330	0,071 713	0,101 281	0,59	0,335 213	0,444 809	0,595 937
0,10	0,396 953	0,079 656	0,112 463	0,60	0,333 225	0,451 494	0,603 856
0,11	0,396 536	0,087 591	0,123 623	0,61	0,331 215	0,458 138	0,611 681
0,12	0,396 080	0,095 517	0,134 758	0,62	0,329 184	0,464 742	0,619 412
0,13	0,395 585	0,103 434	0,145 867	0,63	0,327 133	0,471 306	0,627 047
0,14	0,395 052	0,111 340	0,156 947	0,64	0,325 062	0,477 828	0,634 586
0,15	0,394 479	0,119 235	0,167 996	0,65	0,322 972	0,484 308	0,642 029
0,16	0,393 868	0,127 119	0,179 012	0,66	0,320 864	0,490 746	0,649 377
0,17	0,393 219	0,134 990	0,189 992	0,67	0,318 737	0,497 142	0,656 628
0,18	0,392 531	0,142 847	0,200 936	0,68	0,316 593	0,503 496	0,663 782
0,19	0,391 806	0,150 691	0,211 840	0,69	0,314 432	0,509 806	0,670 840
0,20	0,391 043	0,158 519	0,222 702	0,70	0,312 254	0,516 073	0,677 801
0,21	0,390 242	0,166 332	0,233 522	0,71	0,310 060	0,522 296	0,684 666
0,22	0,389 404	0,174 129	0,244 296	0,72	0,307 851	0,528 475	0,691 433
0,23	0,388 529	0,181 908	0,255 022	0,73	0,305 627	0,534 610	0,698 104
0,24	0,387 617	0,189 670	0,265 700	0,74	0,303 389	0,540 700	0,704 678
0,25	0,386 668	0,197 413	0,276 326	0,75	0,301 137	0,546 745	0,711 156
0,26	0,385 683	0,205 136	0,286 900	0,76	0,298 872	0,552 746	0,717 537
0,27	0,384 663	0,212 840	0,297 418	0,77	0,296 595	0,558 700	0,723 822
0,28	0,383 606	0,220 522	0,307 880	0,78	0,294 305	0,564 609	0,730 010
0,29	0,382 515	0,228 184	0,318 283	0,79	0,292 004	0,570 472	0,736 103
0,30	0,381 388	0,235 823	0,328 627	0,80	0,289 692	0,576 289	0,742 101
0,31	0,380 226	0,243 439	0,338 908	0,81	0,287 369	0,582 060	0,748 003
0,32	0,379 031	0,251 032	0,349 126	0,82	0,285 036	0,587 784	0,753 811
0,33	0,377 801	0,258 600	0,359 279	0,83	0,282 694	0,593 461	0,759 524
0,34	0,376 537	0,266 143	0,369 365	0,84	0,280 344	0,599 092	0,765 143
0,35	0,375 240	0,273 661	0,379 382	0,85	0,277 985	0,604 675	0,770 668
0,36	0,373 911	0,281 153	0,389 330	0,86	0,275 618	0,610 211	0,776 100
0,37	0,372 548	0,288 617	0,399 206	0,87	0,273 244	0,615 700	0,781 440
0,38	0,371 154	0,296 054	0,409 009	0,88	0,270 864	0,621 141	0,786 687
0,39	0,369 728	0,303 463	0,418 739	0,89	0,268 477	0,626 534	0,791 843
0,40	0,368 270	0,310 843	0,428 392	0,90	0,266 085	0,631 880	0,796 908
0,41	0,366 782	0,318 194	0,437 969	0,91	0,263 688	0,637 178	0,801 883
0,42	0,365 263	0,325 514	0,447 468	0,92	0,261 286	0,642 427	0,806 768
0,43	0,363 714	0,332 804	0,456 887	0,93	0,258 881	0,647 629	0,811 563
0,44	0,362 135	0,340 063	0,466 225	0,94	0,256 471	0,652 782	0,816 271
0,45	0,360 527	0,347 290	0,475 482	0,95	0,254 059	0,657 888	0,820 891
0,46	0,358 890	0,354 484	0,484 656	0,96	0,251 644	0,662 945	0,825 424
0,47	0,357 225	0,361 645	0,493 745	0,97	0,249 228	0,667 954	0,829 870
0,48	0,355 533	0,368 773	0,502 750	0,98	0,246 809	0,672 914	0,834 231
0,49	0,353 812	0,375 866	0,511 668	0,99	0,244 390	0,677 826	0,838 508

Z′6

Tablas

Valores estadísticos

Función de error

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt; \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi_0(x)$	erf (x)	x	$\varphi(x)$	$\Phi_0(x)$	erf (x)
1,00	0,241 971	0,682 689	0,842 701	1,50	0,129 518	0,866 336	0,966 105
1,01	0,239 551	0,687 505	0,846 810	1,51	0,127 583	0,868 957	0,967 277
1,02	0,237 132	0,692 272	0,850 838	1,52	0,125 665	0,871 489	0,968 414
1,03	0,234 714	0,696 990	0,854 784	1,53	0,123 763	0,873 983	0,969 516
1,04	0,232 297	0,701 660	0,858 650	1,54	0,121 878	0,876 440	0,970 586
1,05	0,229 882	0,706 282	0,862 436	1,55	0,120 009	0,878 858	0,971 623
1,06	0,227 470	0,710 855	0,866 144	1,56	0,118 157	0,881 240	0,972 628
1,07	0,225 060	0,715 381	0,869 773	1,57	0,116 323	0,883 585	0,973 603
1,08	0,222 653	0,719 858	0,873 326	1,58	0,114 505	0,885 893	0,974 547
1,09	0,220 251	0,724 287	0,876 803	1,59	0,112 704	0,888 165	0,975 462
1,10	0,217 852	0,728 668	0,880 205	1,60	0,110 921	0,890 401	0,976 348
1,11	0,215 458	0,733 001	0,883 533	1,61	0,109 155	0,892 602	0,977 207
1,12	0,213 069	0,737 286	0,886 788	1,62	0,107 406	0,894 768	0,978 038
1,13	0,210 686	0,741 524	0,889 971	1,63	0,105 675	0,896 899	0,978 843
1,14	0,208 308	0,745 714	0,893 082	1,64	0,103 961	0,898 995	0,979 622
1,15	0,205 936	0,749 856	0,896 124	1,65	0,102 265	0,901 057	0,980 376
1,16	0,203 571	0,753 951	0,899 096	1,66	0,100 586	0,903 086	0,981 105
1,17	0,201 214	0,757 999	0,902 000	1,67	0,098 925	0,905 081	0,981 810
1,18	0,198 863	0,762 000	0,904 837	1,68	0,097 282	0,907 043	0,982 493
1,19	0,196 520	0,765 953	0,907 608	1,69	0,095 657	0,908 972	0,983 153
1,20	0,194 186	0,769 861	0,910 314	1,70	0,094 049	0,910 869	0,983 790
1,21	0,191 860	0,773 721	0,912 956	1,71	0,092 459	0,912 734	0,984 407
1,22	0,189 543	0,777 535	0,915 534	1,72	0,090 887	0,914 568	0,985 003
1,23	0,187 235	0,781 303	0,918 050	1,73	0,089 333	0,916 370	0,985 578
1,24	0,184 937	0,785 024	0,920 505	1,74	0,087 796	0,918 141	0,986 135
1,25	0,182 649	0,788 700	0,922 900	1,75	0,086 277	0,919 882	0,986 672
1,26	0,180 371	0,792 331	0,925 236	1,76	0,084 776	0,921 592	0,987 190
1,27	0,178 104	0,795 915	0,927 514	1,77	0,083 293	0,923 273	0,987 691
1,28	0,175 847	0,799 455	0,929 734	1,78	0,081 828	0,924 924	0,988 174
1,29	0,173 602	0,802 949	0,931 899	1,79	0,080 380	0,926 546	0,988 641
1,30	0,171 369	0,806 399	0,934 008	1,80	0,078 950	0,928 139	0,989 090
1,31	0,169 147	0,809 804	0,936 063	1,81	0,077 538	0,929 704	0,989 524
1,32	0,166 937	0,813 165	0,938 065	1,82	0,076 143	0,931 241	0,989 943
1,33	0,164 740	0,816 482	0,940 015	1,83	0,074 766	0,932 750	0,990 347
1,34	0,162 555	0,819 755	0,941 914	1,84	0,073 407	0,934 232	0,990 736
1,35	0,160 383	0,822 984	0,943 762	1,85	0,072 065	0,935 687	0,991 111
1,36	0,158 225	0,826 170	0,945 562	1,86	0,070 740	0,937 115	0,991 472
1,37	0,156 080	0,829 313	0,947 313	1,87	0,069 433	0,938 516	0,991 821
1,38	0,153 948	0,832 413	0,949 016	1,88	0,068 144	0,939 892	0,992 156
1,39	0,151 831	0,835 471	0,950 673	1,89	0,066 871	0,941 242	0,992 479
1,40	0,149 727	0,838 487	0,952 285	1,90	0,065 616	0,942 567	0,992 790
1,41	0,147 639	0,841 460	0,953 853	1,91	0,064 378	0,943 867	0,993 090
1,42	0,145 564	0,844 392	0,955 376	1,92	0,063 157	0,945 142	0,993 378
1,43	0,143 505	0,847 283	0,956 857	1,93	0,061 952	0,946 393	0,993 656
1,44	0,141 460	0,850 133	0,958 297	1,94	0,060 765	0,947 620	0,993 922
1,45	0,139 431	0,852 941	0,959 695	1,95	0,059 595	0,948 824	0,994 179
1,46	0,137 417	0,855 710	0,961 054	1,96	0,058 441	0,950 004	0,994 426
1,47	0,135 418	0,858 438	0,962 373	1,97	0,057 304	0,951 162	0,994 664
1,48	0,133 435	0,861 127	0,963 654	1,98	0,056 183	0,952 297	0,994 892
1,49	0,131 468	0,863 776	0,964 898	1,99	0,055 079	0,953 409	0,995 111

INDICE DE LA PARTE I

INDICE DE LA PARTE II